

■ Exercice n° 1, EFP Lausanne, Octobre 2005

1. Calculer la surface d'un barrage de hauteur h et largeur b .
2. Calculer la même surface par intégration de dS .
3. Calculer la surface latérale d'un cône de hauteur h et de base de rayon R .
4. Calculer la surface d'une sphère.

■ Exercice n° 2, EFP Lausanne, Octobre 2005

L'oxygène est un gaz dangereux pour l'homme lorsqu'il est respiré à des pressions partielles (PP_{O_2}) trop élevées (risque d'hyperoxie) ou trop faibles (risque d'hypoxie).

On se propose d'étudier les limites qu'un plongeur ou un alpiniste ne devrait jamais dépasser compte tenu du danger de l'oxygène.

Pour cela, on rappelle tout d'abord que l'air est composé de 80% d'azote et de 20% d'oxygène. On rappelle également la loi de Dalton : « La pression partielle d'un gaz est la pression qu'aurait ce gaz s'il occupait seul tout le volume du mélange ».

$$\begin{aligned} \text{Ainsi pour l'oxygène} \quad PP_{O_2} &= P_{\text{abs}} \times \%O_2 \\ \text{c'est à dire au niveau de la mer} \quad PP_{O_2} &= 1 \times 20\% \\ &= 0.2b \end{aligned}$$

On rappelle enfin l'équation du gaz parfait.

$$PV = nRT \quad \text{avec } n = \frac{m}{M}$$

$$\begin{cases} R = 8.32 \text{ JK}^{-1}\text{mol}^{-1} \\ M = 29 \text{ gmol}^{-1} \end{cases}$$

Les ouvrages de médecine indiquent :

$$\begin{cases} PP_{O_2} > 1.6 \text{ bar} \Rightarrow \text{risque d'hyperoxie} \\ PP_{O_2} < 0.1 \text{ bar} \Rightarrow \text{risque d'hypoxie} \end{cases}$$

1. Cas de l'alpiniste

Calculer l'altitude maximale qu'un alpiniste peut atteindre sans risque, d'hypoxie.

L'atmosphère sera considérée comme un gaz parfait isotherme en température ($T = 0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$)

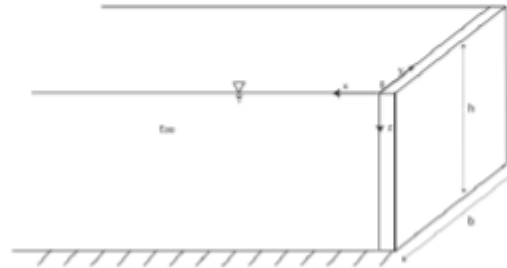
2. Cas du plongeur

Calculer la profondeur maximale qu'un plongeur peut atteindre sans risque d'hyperoxie.

L'eau sera considérée comme incompressible ($\rho = 10^3 \text{ kgm}^{-3}$)

■ Exercice n° 3, EFP Lausanne, Octobre 2005

On considère une paroi plane verticale de largeur $b = 4\text{m}$ et de hauteur $h = 6\text{m}$, immergé dans l'eau du côté gauche. Calculer la force hydrostatique s'appliquant sur la paroi ainsi que la position du point d'application de cette force.



■ Exercice n° 4, EFP Lausanne, Octobre 2005

L'échelle des dieux ou le nombre de Deborah

On considère le vitrail d'une cathédrale dont la construction a été terminée en l'an 1005.

Sachant que le temps caractéristique du verre est :

$$t_r = \frac{\eta}{G}, \text{ où } \eta \text{ est la viscosité du verre et } G \text{ son module de cisaillement.}$$

Sachant que notre matériau peut être considéré comme isotrope, la théorie sur l'élasticité linéaire nous donne :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \text{ où } E \text{ est le module de Young et } \nu \text{ le coefficient de Poisson}$$

1. Calculer le temps caractéristique de l'écoulement dans le vitrail.
2. Calculer le temps caractéristique du verre.
3. Calculer le nombre de Deborah
4. Faire de même en passant le vitrail dans un laminoir ($t_e = 10^{-3} s$)
5. Commenter et comparer les résultats
6. Selon vous, quelle serait l'épaisseur du vitrail de la cathédrale si, à sa construction, la hauteur avait été constante ?

Données :

Vitrail $E = 60 \text{ GPa}$ $\nu = 0.2$ $\eta = 10^{20} \text{ Pas}$

■ Réponse Exercice n° 1, EFP Lausanne, Octobre 2005

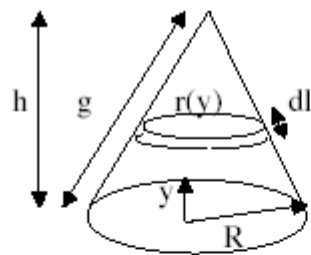
1. Calculer la surface d'un barrage de hauteur h et largeur b .

$$S = b \cdot h$$

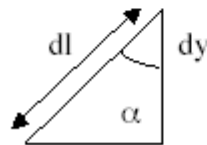
2. Calculer la même surface par intégration de dS

$$S = \int_S dS = \int_0^h \int_0^b 1 \, dx dy = x \Big|_0^b y \Big|_0^h = b \cdot h$$

3. Calculer la surface latérale d'un cône de hauteur h et de base de rayon



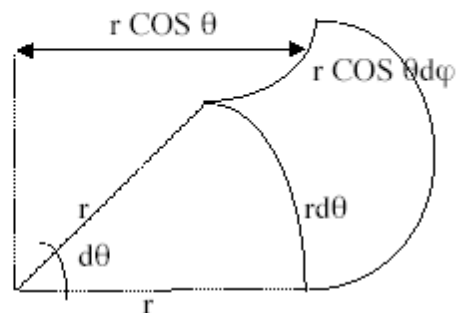
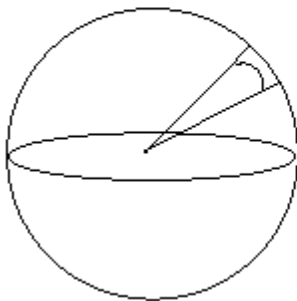
$$S = \int_S dS = \int_0^h 2\pi r(y) \underbrace{\frac{dy}{dl}}_{\cos \alpha}$$



$$dl = \frac{dy}{\cos \alpha}$$

$$\begin{aligned}
 \text{avec } \cos \alpha &= \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \\
 S &= \int_0^h 2\pi \left(-\frac{R}{h} y + R \right) \frac{\sqrt{R^2 + h^2}}{h} dy \\
 &= 2\pi \frac{\sqrt{R^2 + h^2}}{h} \left\{ \left[-\frac{R}{h} \frac{y^2}{2} \right]_0^h + Ry \Big|_0^h \right\} \\
 &= 2\pi \frac{\sqrt{R^2 + h^2}}{h} \frac{Rh}{2} = \pi Rg \text{ avec } g = \sqrt{R^2 + h^2}
 \end{aligned}$$

4. Calculer la surface d'une sphère.



$$\begin{aligned}
 S = \int dS &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos \theta \, d\theta \, d\varphi \\
 &= r^2 \int_0^{2\pi} \sin \theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \\
 &= r^2 \int_0^{2\pi} 2 d\varphi \\
 &= r^2 2\varphi \Big|_0^{2\pi} = 4\pi r^2
 \end{aligned}$$

■ Réponse Exercice n° 2, EFP Lausanne, Octobre 2005

1. Cas de l'alpiniste

Calculer l'altitude maximale qu'un alpiniste peut atteindre sans risque, d'hypoxie.

L'atmosphère sera considérée comme un gaz parfait isotherme en température ($T = 0^\circ\text{C} = 273\text{ K}$)

- Loi de statique des fluides

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad 1.$$

- Gaz parfait

$$\left. \begin{aligned} PV &= nRT \\ &= \frac{m}{M} RT \\ \rho &= \frac{m}{V} \end{aligned} \right\} \rho = P \frac{M}{RT} \quad 2.$$

$$1. \text{ et } 2. \rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} dz$$

$$\rightarrow \ln \frac{P}{P_0} = -\frac{Mg}{RT} z \quad 3.$$

- Pression partielle d'oxygène (loi de Dalton)

$$PP_{O_2} = 0.2 \times P \quad 4.$$

- Limite d'hypoxie

$$PP_{O_2} = 0.1 \text{ bar} \quad 5.$$

4. et 5. $\rightarrow P = 0.5 \text{ bar}$

$$\rightarrow z = -\frac{RT}{Mg} \times \ln \frac{P}{P_0}$$

$$z = -\frac{8.32 \times 273}{0.029 \times 10} \times \ln \left(\frac{0.5}{1} \right)$$

$$z = 5400 \text{ m}$$

2. Cas du plongeur

Calculer la profondeur maximale qu'un plongeur peut atteindre sans risque d'hyperoxie.

L'eau sera considérée comme incompressible ($\rho = 10^3 \text{ kgm}^{-3}$)

- $\frac{dP}{dz} = -\rho g$

$$\int_{P_0}^P dP = -\rho g \int_0^z dz$$

$$P(z) = P_0 - \rho g z$$

- Limite d'hyperoxie

$$PP_{O_2} = 1.6 \text{ bar}$$

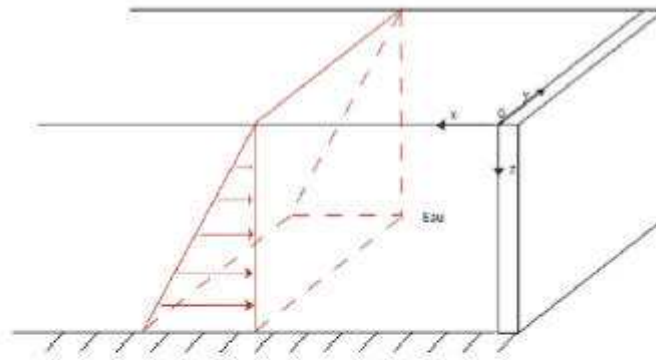
$$PP_{O_2} = 0.2 \times P$$

$$\rightarrow P = \frac{1.6}{0.2} = 8 \text{ bar}$$

- $1b = 10^5 \text{ Pa}$

$$z = \frac{P_0 - P}{\rho g} = \frac{10^5 - 8 \cdot 10^5}{10^3 \times 10} = -70 \text{ m}$$

$$\boxed{z_{\max} = 70 \text{ m}}$$



$$d\vec{F} = p dS \vec{e}_x$$

$$d\vec{F} = -\rho g z dS \vec{e}_x$$

Le calcul intégral s'écrit :

$$\vec{F} = -\rho g \int_S z dS \vec{e}_x$$

$$\vec{F} = -\rho g \int_0^h \int_0^b z dy dz \vec{e}_x$$

Soit dans ce cas,

$$\vec{F} = -\rho g b \int_0^h z dz \vec{e}_x$$

$$\vec{F} = -\rho g b \frac{h^2}{2} \vec{e}_x$$

Remarque : on retrouve l'expression $\vec{F} = -\rho g h_G S \vec{e}_x$ avec h_G le centre de gravité de la structure, $h_G = h/2$

Finalement

$$F = 706 \text{ kN}$$

Le centre de poussée P des forces de pression exercée par un liquide sur une paroi se calcule par :

$$z_p = \frac{I_{xx}}{z_G S} + z_G$$

I_{xx} étant le moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de gravité G ($y_G = b/2$, $z_G = h/2$) et parallèle à l'axe x.

Grâce aux valeurs des centres de gravité et des moments connus de surface simple (rectangle, triangle, trapèze, cercle...),

On obtient :

$$z_p = \frac{bh^3/12}{z_G S} + z_G = 4\text{m}$$

■ Réponse Exercice n° 4, EFP Lausanne, Octobre 2005

7. Calculer le temps caractéristique de l'écoulement dans le vitrail.

Le calcul de t_e du vitrail dans la cathédrale.

Le vitrail a pu s'écouler pendant 1000 ans.

$$t_e = 1000 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 3.1536 \cdot 10^{10} \text{ s}$$

8. Calculer le temps caractéristique du verre.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \frac{60 \cdot 10^9}{2(1 + 0.2)} = 25 \text{ GPa}$$

$$t_r = \frac{\eta}{G} = \frac{10^{20}}{25 \cdot 10^9} = 4 \cdot 10^9 \text{ s}$$

9. Calculer le nombre de Deborah

$$De_{cathédrale} = \frac{t_r}{t_e} = \frac{4 \cdot 10^9}{3.1536 \cdot 10^{10}} \approx 0.12$$

10. Faire de même en passant le vitrail dans le laminoire ($t_e = 10^{-3} \text{ s}$)

$$De_{laminoir} = \frac{t_r}{t_e} = \frac{4 \cdot 10^9}{10^{-3}} = 4 \cdot 10^{12}$$

11. Commenter et comparer les résultats

Comme le vitrail s'est écoulé ($De \ll 1$), le vitrail s'est aminci au sommet et s'est épaissi au bas du vitrail.

■ Exercice n° 1, EFP Lausanne, 14 Novembre 2005

Après les inondations de la Nouvelle-Orléans vous avez été mandatés pour vérifier le dimensionnement des digues. Les nouvelles digues se présentent sous la forme d'un barrage-poids en béton, dont la masse volumique est ρ_b . Lors d'une crue, l'eau, de masse volumique ρ_e , effleure le sommet de la structure. Pour le calcul de la stabilité on admet que la section du barrage est triangulaire (figure ??).

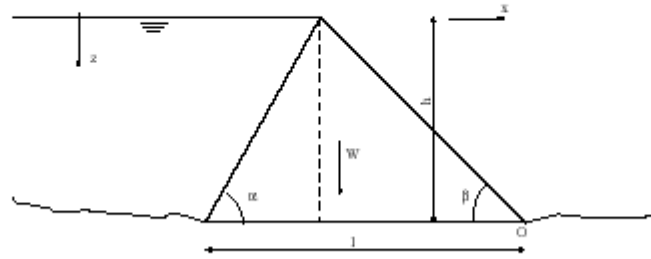


FIG. 1 – barrage-poids en béton

- À partir de la formule $^1 \vec{F} = \int_{z_1}^{z_2} p \vec{n} dS$, déduisez les deux composantes de la force de pression due à au parement du barrage (considérez les axes x et z indiqués).
- Quelle devra être la valeur minimale de la densité du béton ρ_b pour garantir l'équilibre des moments O. Admettez une sous-pression F_s agissant sur la face horizontale du barrage. Cette dernière varie linéairement de cette face depuis la pression maximale jusqu'à zéro (point O).
- Quelles sont les faiblesses de ce modèle? que devriez-vous inclure en plus?

Données :

$$\begin{aligned} \rho_{eau} &= 10^3 \text{ kg m}^{-3} \quad h = 30 \text{ m} \\ \alpha &= 65^\circ \\ \beta &= 45^\circ \end{aligned}$$

¹Faites attention à la définition de votre volume de contrôle et vérifiez la cohérence de vos résultats

■ Exercice n° 2, EFP Lausanne, 14 Novembre 2005

Mesures de pression

- a) On considère un manomètre à liquide ($\rho_{eau}=998 \text{ kg.m}^{-3}$) ayant un réservoir de rayon 0,5 m (section S_1) et un tube vertical de rayon 0,05 m (section S) figure ??a. L'objectif est de calculer la pression différentielle ΔP ($\Delta P = P_1 - P_0$). Lorsque $P_1 = P_0$, on a $z_1 = z_0$ comme représenté sur la figure ??a



FIG. 2 – manomètre à liquide

- i) Démontrer la relation suivante : $\Delta P = \rho g(z - z_0)(1 + \frac{S}{S_1})$
 - ii) Exprimer la sensibilité $\frac{\Delta z}{\Delta P}$
- b) Le manomètre à liquide est désormais constitué d'un tube incliné d'un angle $\alpha=45$ (figure ??b)
- i) Exprimer la pression différentielle.
 - ii) Exprimer la sensibilité
 - iii) Commentaires
- c) On considère enfin un manomètre différentiel (figure ??) constitué de deux récipients cylindriques de rayon $R_2=0,5 \text{ m}$ (sections S_1 et S_2) reliés par un tube de rayon $r=0,05 \text{ m}$ (section s). Ce dispositif est rempli de deux liquides non miscibles de masse volumique $\rho_1= 922 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\rho_2= 998 \text{ kg.m}^{-3}$ (huile et eau).

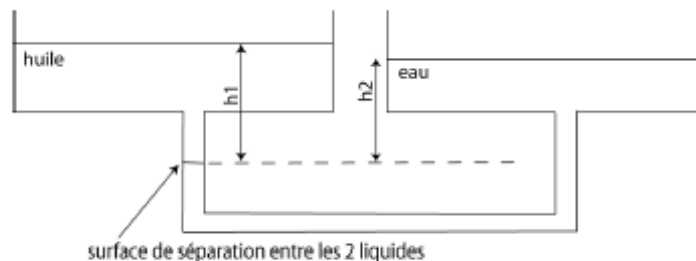


FIG. 3 – manomètre différentiel

- i) Initialement, les deux cylindres sont soumis à la même pression P_0 . Etablir une relation entre h_1 et h_2 .
- ii) Une surpression (ΔP) est appliquée au dessus du liquide 1. Ceci conduit à un déplacement de la surface de séparation entre les deux liquides de Δh . Calculer la sensibilité $\frac{\Delta h}{\Delta P}$

Calcul de surface

- a) Calculer la surface d'un barrage de hauteur h et de largeur b .
- b) Calculer la même surface par intégration de dS .
- c) Calculer la surfave latérale d'un cône de hauteur h et de base de rayon R .
- d) Calculer la surface d'une sphère.

■ Réponse Exercice n° 1, EFP Lausanne, 14 Novembre 2005

Les forces de pression sur le parement du barrage

La force de pression est donnée par l'intégrale ² :

$$\mathbf{F}_p = \int -p_e \mathbf{n} dS$$

$$\text{avec } \mathbf{n} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

Dans le repère cartésien xz ceci donne (voir la figure 2) :

$$F_x = \sin \alpha \cdot F$$

$$F_z = \cos \alpha \cdot F$$



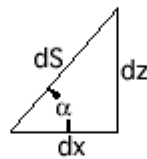
FIG. 2 – Surface infinitésimale

dz est une fonction de dS :

$$dz = \sin \alpha \cdot dS$$

$$dS = \frac{dz}{\sin \alpha}$$

On peut donc réécrire l'équation 1 sous la forme :

FIG. 3 – décomposition de dz

$$\mathbf{F} = \int_0^h -\rho_c g z \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{pmatrix} \frac{dz}{\sin \alpha}$$

Ce qui donne dans le repère cartésien xz :

$$F_x = \rho_c g \int_0^h z \cdot dz = \rho g \frac{h^2}{2}$$

$$F_z = \rho_c g \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \int_0^h z \cdot dz = \rho g \frac{h^2}{2} \cot \alpha$$

Equilibre des moments en O

Pour que le barrage soit stable, d'un point de vue des moments par rapport au point O, il faut que les mom par la masse du barrage et celui dû à la force F_z soit plus grand que ceux engendrés par la force F_x et la pression F_s . L'équilibre peut s'écrire :

$$F_x d_2 + F_s d_1 = F_z e_3 + w_1 e_4 + w_2 e_2$$

Centre de poussée de F_p

$$z_p = \frac{\int_S z \cdot d\mathbf{F}}{\int_S d\mathbf{F}}$$

Ceci peut être réécrit dans le système de coordonnées cartésiennes xz de la façon suivante :

– Selon x :

$$z_{px} = \frac{\int_0^h \rho g z \sin \alpha \cdot z \frac{dz}{\sin \alpha}}{\int_0^h \rho g z \sin \alpha \frac{dz}{\sin \alpha}} = \frac{\int_0^h z^2 dz}{\int_0^h z dz} = \frac{\frac{h^3}{3}}{\frac{h^2}{2}} = \frac{2}{3}h$$

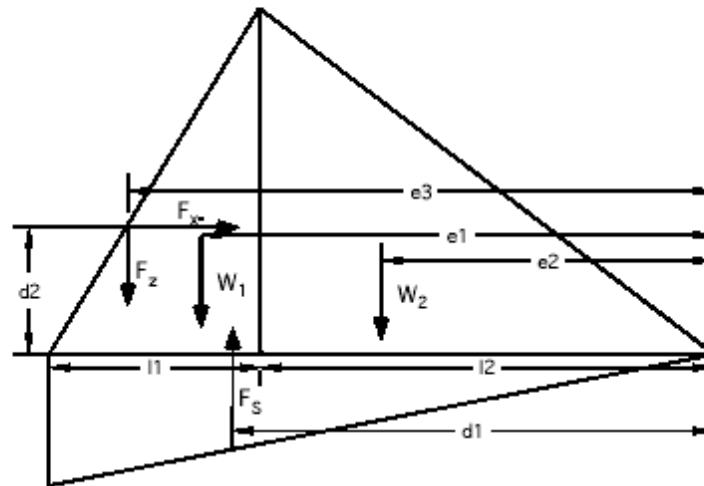


FIG. 4 – Equilibre des moments

– Selon z :

$$z_{pz} = \frac{\int_0^h \rho g z \cos \alpha \cdot z \frac{dz}{\sin \alpha}}{\int_0^h \rho g z \cos \alpha \frac{dz}{\sin \alpha}} = \frac{\int_0^h z^2 dz}{\int_0^h z dz} = \frac{\frac{h^3}{3}}{\frac{h^2}{2}} = \frac{2}{3}h$$

De là nous pouvons trouver d_2 et e_3 :

$$d_2 = \frac{1}{3}h$$

$$e_3 = l_2 + \frac{2}{3}l_1$$

avec :

$$l_1 = \frac{h}{\tan \alpha}$$

$$l_2 = \frac{h}{\tan \beta}$$

Moment dû à la sous-pression

La force F_s dû s'écrit :

$$F_s = \rho g \frac{hl}{2}$$

avec :

$$l = l_1 + l_2 = \frac{h}{\tan \alpha} + \frac{h}{\tan \beta}$$

$$d_1 = \frac{2}{3}l$$

Moment dû au barrage

Le poids du barrage se calcule :

$$W_1 = \rho_b g \frac{hl_1}{2}$$

$$W_2 = \rho_b g \frac{hl_2}{2}$$

avec, comme point d'application :

$$e_1 = l_2 + \frac{1}{3}l_1$$

$$e_2 = \frac{2}{3}l_2$$

Application numérique

$$\begin{aligned}
 l &= 44.0 \text{ m} \\
 l_1 &= 14.0 \text{ m} \\
 l_2 &= 30.0 \text{ m} \\
 F_x &= 4414.5 \text{ kN/m} \\
 F_z &= 2058.5 \text{ kN/m} \\
 F_s &= 6474.6 \text{ kN/m} \\
 d_2 &= 10.0 \text{ m} \\
 d_2 &= 10.0 \text{ m} \\
 w_1 &= 210g\rho_b \text{ kN/m} \\
 w_2 &= 450g\rho_b \text{ kN/m} \\
 d_1 &= 29.3 \text{ m} \\
 d_2 &= 10.0 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Equilibre des moments en O

$$\begin{aligned}
 F_x d_2 + F_s d_1 &= F_z e_3 + w_1 e_4 + w_2 e_2 \\
 152951.7 &= 16287\rho_b g
 \end{aligned}$$

Donc finalement la masse volumique du béton ρ_e doit être supérieure à :

$$\rho_b = 960 \text{ kg/m}^3$$

ce qui n'est pas un problème car la masse volumique du béton est env. $2.5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$

Modèle simpliste ?

Notre modèle ne vérifie pas l'ancrage du barrage. Dans un cas réel il faudrait également vérifier que la force ne fait pas glisser la digue.

²Ici les caractères en gras représentent des vecteurs

- a) i) Par conservation de la masse :

$$S_1(z_0 - z_1) = S(z - z_0)$$

Par la loi de la statique des fluides :

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial z} &= -\rho g \\ P_1 - P_0 &= -\rho g(z_1 - z)\end{aligned}$$

de 3, il vient :

$$z_1 = z_0 - \frac{S}{S_1}(z - z_0)$$

5 et 6 donnent :

$$\Delta P = \rho g(z - z_0)\left(1 + \frac{S}{S_1}\right)$$

- ii)

$$\frac{\Delta z}{\Delta P} = \frac{1}{\rho g(1 + \frac{S}{S_1})}$$

AN :

$$\frac{\Delta z}{\Delta P} = 0.10 \text{ mm} \cdot \text{Pa}^{-1}$$

- b) i) De la même façon, on obtient :

$$\begin{aligned}\Delta P &= \rho g(z - z_0)\left(1 + \frac{S}{S_1}\right) \\ \Delta P &= \rho g \sin(\alpha)(l - l_0)\left(1 + \frac{S}{S_1}\right)\end{aligned}$$

- ii)

$$\frac{\Delta l}{\Delta P} = \frac{1}{\rho g \sin(\alpha)(1 + \frac{S}{S_1})}$$

AN :

$$\frac{\Delta l}{\Delta P} = 0.14 \text{ mm} \cdot \text{Pa}^{-1}$$

- c) i) Par la loi de la statique des fluides :

$$\begin{aligned}P_0 + \rho_1 g h_1 &= P_0 + \rho_2 g h_2 \\ \rho_1 h_1 &= \rho_2 h_2\end{aligned}$$

- ii)

$$P_0 + \rho_1 g(h_1 + \Delta h - \Delta h_1) = P_0 + \Delta P + \rho_2 g(h_2 + \Delta h + \Delta h_2)$$

Par conservation de la masse, on a :

$$\begin{aligned}\Delta h_1 S_1 &= \Delta h s \\ \Delta h_2 S_2 &= \Delta h s\end{aligned}$$

De 11, 12 et 13, on obtient :

$$\Delta P = g \Delta h \left(\rho_2 - \rho_1 + s \left(\frac{\rho_1}{S_1} + \frac{\rho_2}{S_2} \right) \right)$$

d'où :

$$\frac{\Delta h}{\Delta P} = \frac{1}{g \left(\rho_2 - \rho_1 + s \left(\frac{\rho_1}{S_1} + \frac{\rho_2}{S_2} \right) \right)}$$

AN :

$$\frac{\Delta z}{\Delta P} = 2.2 \text{ mm} \cdot \text{Pa}^{-1}$$

(11) renvoie à l'exercice suivant ; (12) & (13) renvoie à l'exercice 7 ci-après

■ Réponse Exercice n° 3, EFP Lausanne, 14 Novembre 2005

a) Calculer la surface d'un barrage de hauteur h et de largeur b .

$$S = b \cdot h$$

b) Calculer la même surface par intégration de dS .

$$S = \int_S dS = \int_0^h \int_0^b 1 dx dy = x \Big|_0^b y \Big|_0^h = b \cdot h$$

c) Calculer la surface latérale d'un cône de hauteur h et de base de rayon R .

La surface infinitésimale de la figure 7 nous donne :

$$S = \int_S dS = \int 2\pi r(y) dl$$

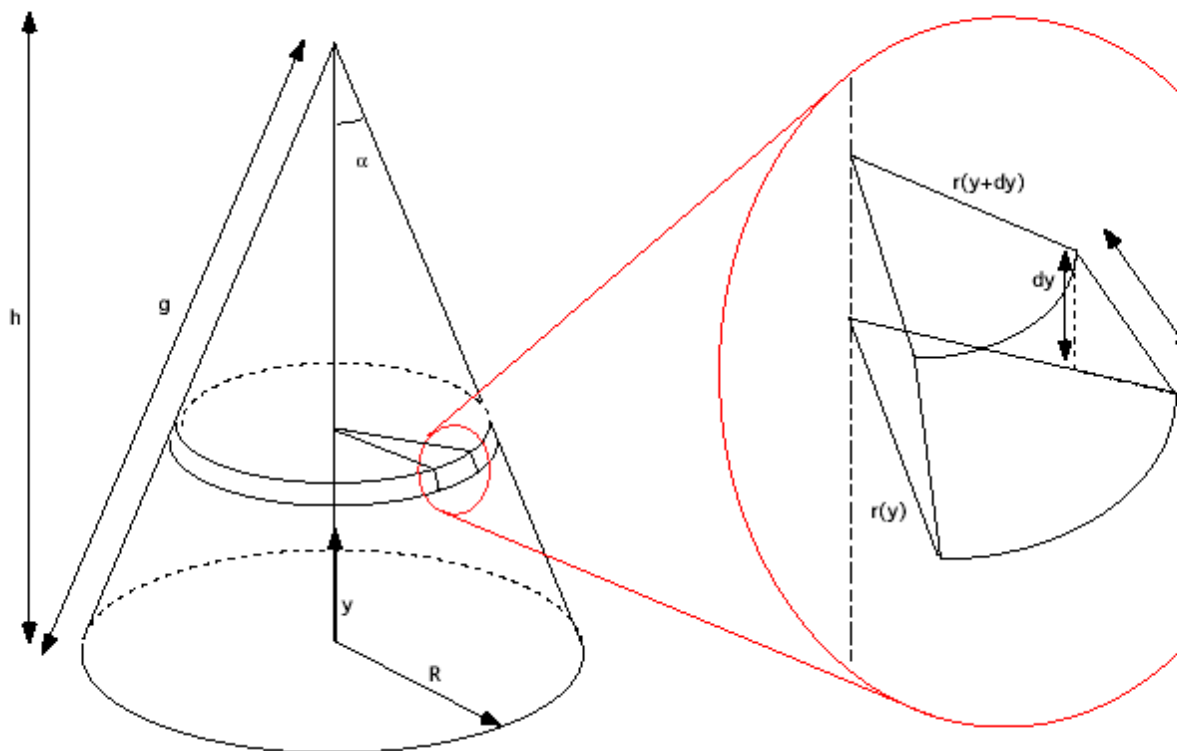
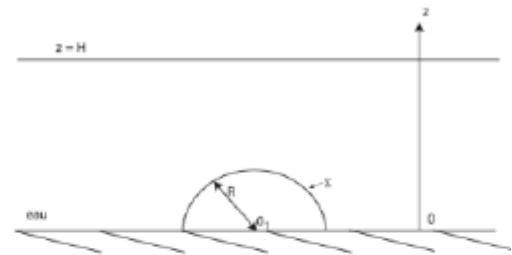
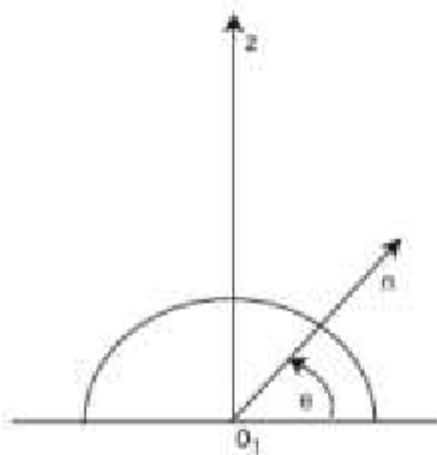


FIG. 7 – Calcul de la surface d'un cône

■ Exercice n° 1, EFP Lausanne, 27 Novembre 2005

Le propriétaire d'un parc aquatique vous a contacté pour installer un hublot dans l'aquarium aux requi doit permettre aux visiteurs d'avoir une magnifique vue depuis le fond du bassin. Le hublot peut être assin hémisphérique de rayon R qui repose sur le fond du bassin contenant de l'eau de mer (de masse volumique libre est à une hauteur h par rapport au fond horizontal. La pression à l'air libre sera notée P_0 . Déterminer la forces de pression sur la surface Σ du solide en contact avec le fluide. On notera P_1 la pression au fond du b



Indications

Justifiez tout d'abord la symétrie cylindrique d'axe (O_1, \vec{e}_z) pour la force hydrostatique. En déduire alors q F_z . Calculez alors la résultante des forces de pression.

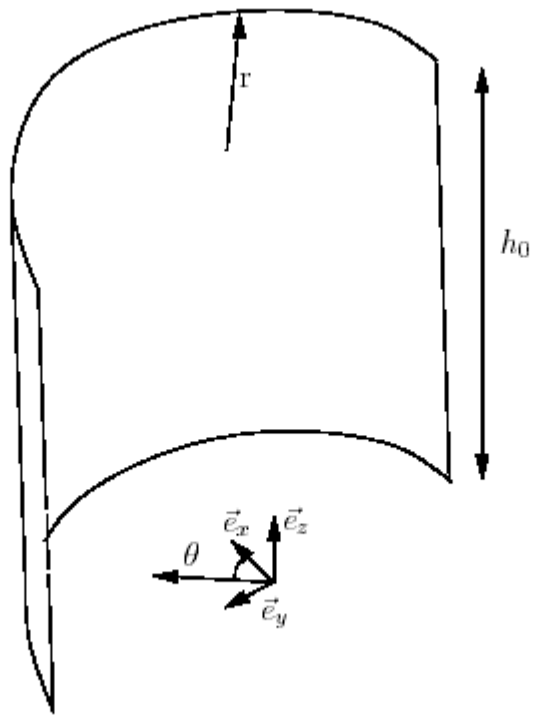
■ Exercice n° 2, EFP Lausanne, 27 Novembre 2005

Pour un nouveau projet de barrage, vous devez faire une première étude des efforts appliqués sur celui-ci. l hémicylindrique de rayon r et de hauteur h_0 . Il est d'épaisseur négligeable par rapport aux autres dimensions

- a) Calculer par intégration la surface du barrage.

$$S = \int dS$$

- b) Calculer \vec{n}
 c) Calculer la force exercée sur le barrage et calculer son point d'appui.
 d) Comparer avec un barrage plat de hauteur h_0 et de largeur $2r$.



■ Réponse Exercice n° 1, EFP Lausanne, 27 Novembre 2005

Le fluide est en équilibre dans le champ de pesanteur. L'équation de l'hydrostatique s'écrit :

$$\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \rho \vec{g}$$

Soit :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

Une simple intégration donne :

$$\begin{aligned} P(z) &= -\rho g z + cte \\ P(H) &= P_0 = -\rho g H + cte \end{aligned}$$

D'où :

$$cte = P_0 + \rho g H$$

Finalement

$$P(z) = \rho g (H - z) + P_0$$

Un élément de surface δS du solide centré sur le point M est soumis à une force élémentaire :

$$\delta \vec{F} = -P(M) \vec{n} \delta S$$

La symétrie cylindrique d'axe (O_1, \vec{e}_z) impose $\vec{F} = F \vec{e}_z$. On ne considère donc que les composantes selon

$$\vec{n} \vec{e}_z = \sin \theta$$

On a également :

$$\sin \theta = z/R \text{ et } dz = R \cos \theta d\theta$$

De plus, pour une bande de largeur $Rd\theta$ comprise entre les angles θ et $\theta + d\theta$, l'élément de surface δS ($Rd\theta$)($2\pi R \cos \theta$)

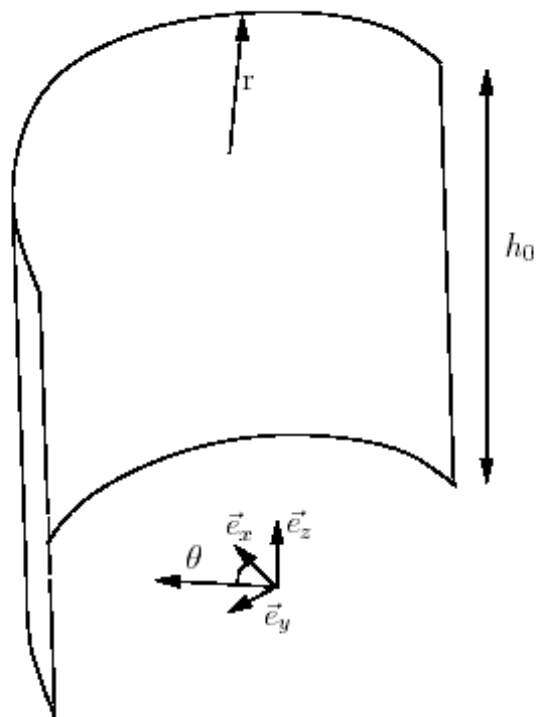
D'où

$$\delta S = 2\pi R dz$$

Finalement

$$\begin{aligned} \delta F &= -P(M) \sin \theta \delta S \\ \delta F &= -P(M) 2\pi z dz \\ F &= \int_0^R (-P_1 + \rho g z) 2\pi z dz \\ F &= -\pi R^2 P_1 + \frac{2}{3} \rho g \pi R^3 \end{aligned}$$

■ Réponse Exercice n° 2, EFP Lausanne, 27 Novembre 2005



Calcul de la surface

$$\begin{aligned}
 S &= \int dS \\
 &= \int_0^{h_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r \, dh \, d\phi \\
 &= h_0 \pi r
 \end{aligned}$$

Calcul de \vec{n}

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calcul de la force exerce sur le barrage

Pour le calcul de la force exercée sur le barrage, il suffit d'intégrer toutes les forces de pression sur l'ensembl infinitésimales du barrage.

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \int -p\vec{n}dS \\ &= \int_0^{h_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\rho g(h_0 - z) \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} r d\theta dz\end{aligned}$$

Comme la composante z de \vec{n} est nulle on a immédiatement $F_z = 0$

$$\begin{aligned}F_x &= -\rho g r (\sin(\theta)) \left|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(h_0 z - \frac{z^2}{2} \right) \right|_0^{h_0} \\ &= -\rho g r h_0^2\end{aligned}$$

$$F_y = \dots = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dots \sin(\theta) \dots d\theta = 0$$

Pour F_y on aurait aussi pu le trouver en constatant que le barrage à un plan de symétrie passant par l'origine d est selon \vec{e}_y

Point d'application \vec{A}

Pour le calcul du point d'application, on doit avoir le moment de la force résultante $\vec{M} = \vec{A} \times \vec{F}$ qui est égale des moments de toutes les forces de pression infinitésimales appliquées $\vec{M} = \int \vec{A} \times d\vec{F}$.

On a donc : $\vec{A} \times \vec{F} = \int \vec{A} \times d\vec{F}$ avec

- \vec{A} est le vecteur de l'origine au point d'application
- \vec{F} est la force résultante calculée au point précédent
- $d\vec{F}$ est la force de pression exercée sur un élément de surface infinitésimal dS

$$\begin{aligned}
 \vec{A} \times \vec{F} &= \int_0^{h_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -p \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} r \, d\theta \, dz \\
 &= \int_0^{h_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\rho g (h_0 - z) \begin{pmatrix} -z \sin \theta \\ z \cos \theta \\ r \sin \theta \cos \theta - r \cos \theta \sin \theta \end{pmatrix} \\
 &= \int_0^{h_0} -r g \rho (h_0 - z) \begin{pmatrix} -z \cos \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ -z \sin \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} d\theta \, dz \\
 &= r g \rho \int_0^{h_0} h_0 z - z^2 \, dz \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= -r g \rho \frac{1}{3} (h_0 z^2 - z^3) \Big|_0^{h_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{1}{3} r g \rho h_0^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{A} \times \vec{F} &= \begin{pmatrix} r g \rho h_0^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \text{ d'après la première partie de l'exercice} \\
 &= - \begin{pmatrix} 0 \\ r g \rho h_0^2 A_z \\ r g \rho h_0^2 A_y \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
 - \begin{pmatrix} 0 \\ r g \rho h_0^2 A_z \\ r g \rho h_0^2 A_y \end{pmatrix} &= -\frac{1}{3} r g \rho h_0^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow A_y &= 0 \\
 A_z &= \frac{1}{3} h_0
 \end{aligned}$$

Malheureusement le A_x doit être calculer séparément :

$$\begin{aligned}
 |F|A_x &= 2 \int_0^{h_0} \int_0^r x p \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dx dh \\
 x &= r \cos \theta \Rightarrow dx = -r \sin \theta d\theta \\
 |F|A_x &= 2 \int_0^{h_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cos \theta (h_0 - h) \rho g \cos \theta (-r \sin \theta) d\theta dh \\
 &= 2r^2 g \int_0^{h_0} h_0 - h dh \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \\
 &= 2h_0^2 \rho g r^2 \left(\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{2}{3} |F| r \\
 &\Rightarrow A_x = \frac{2}{3} r
 \end{aligned}$$

■ Exercice n° 1, EFP Lausanne, 12 décembre 2005

Un réservoir cylindrique est rempli partiellement d'un liquide incompressible. Un barreau de diamètre d le liquide à une vitesse v_0 . Déterminer la vitesse moyenne de sortie v_1 du liquide s'échappant le long des parois cylindrique.

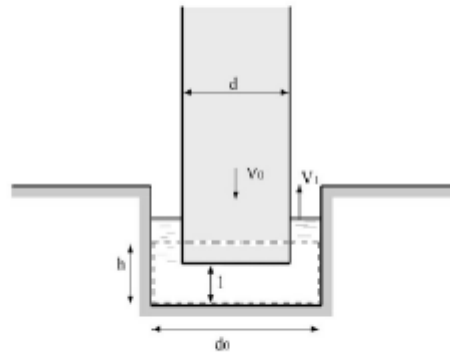


FIG. 1 – Réservoir cylindrique

■ Exercice n° 2, EFP Lausanne, 12 décembre 2005

Petit wagonnet

Un jet d'eau ($v_1 = 12$ m/s) issu d'une tuyère fixe frappe une vanne orientable montée sur un wagon. Le jet est dans la direction $\theta = 50^\circ$. Déterminer la valeur de la force F nécessaire pour garder le wagon fixe. La surface de la vanne est de 0.045 m².

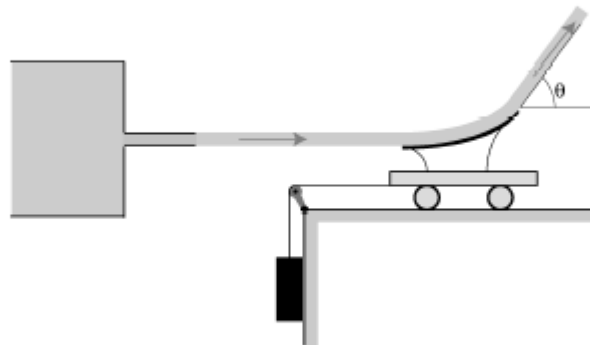


FIG. 2 – Vanne orientable montée sur un wagon

Si θ pouvait varier, déterminer F en fonction de θ pour $0^\circ < \theta < 180^\circ$ afin que le wagon reste immobile.

■ Exercice n° 3, EFP Lausanne, 12 décembre 2005

Considérons le dispositif donné à la figure 3. En 2, deux conduites sont raccordées par l'intermédiaire d'un intermédiaire déformable. De l'eau s'écoule dans la conduite de 1 à 3. De l'eau entoure la conduite en 2 et l'on peut varier la hauteur d'eau H_2 .

Que devient la section S_2 du conduit déformable si l'on augmente H_2 tout en maintenant cette hauteur in-

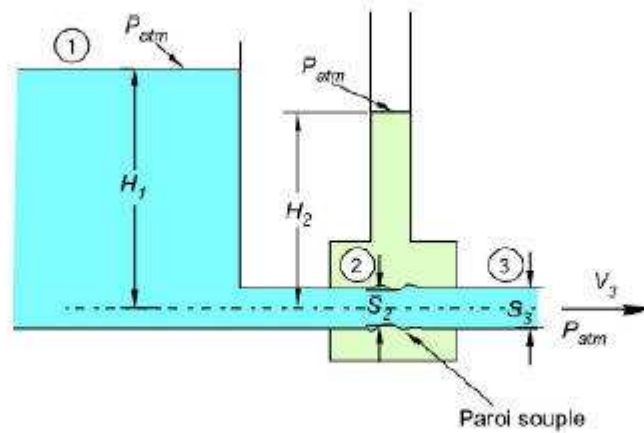


FIG. 3 – Raccordement de deux conduites par une paroi souple

A quoi peut bien servir un tel montage?

■ Réponse Exercice n° 1, EFP Lausanne, 12 décembre 2005

La forme intégrale de l'équation de continuité s'écrit :

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = 0$$

a) On vérifie au moyen du premier terme :

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left(\frac{\pi d^2}{4} l + \frac{\pi}{4} (d_0^2 - d^2) h \right) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left(\frac{\pi d^2}{4} (l - h) + \frac{\pi d_0^2}{4} h \right) \right) \\ &= \rho \frac{\pi d^2}{4} \frac{\partial l}{\partial t} \\ &= \rho \frac{\pi d^2}{4} (-v_0) \end{aligned}$$

b) On vérifie au moyen du second terme :

$$\int_S \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \rho \frac{\pi}{4} (d_0^2 - d^2) v_1$$

c) L'équation de continuité se réécrit alors :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\pi d^2}{4} (-v_0) &= \rho \frac{\pi}{4} (d_0^2 - d^2) v_1 \\ v_1 &= -\frac{d^2}{d_0^2 - d^2} v_0 \end{aligned}$$

■ Réponse Exercice n° 2, EFP Lausanne, 12 décembre 2005

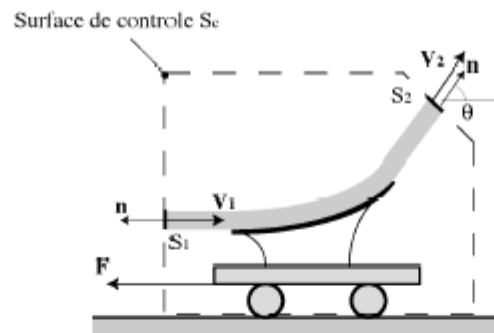


FIG. 3 – Volume de contrôle

Ecoulement incompressible : $\rho = cste$

Ecoulement stationnaire : $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

a) Sachant que la pression statique est partout la même sur la surface libre du jet, l'équation de

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho|\vec{v}_1|^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho|\vec{v}_2|^2$$

$$p_1 = p_2$$

donc :

$$|\vec{v}_1|^2 = |\vec{v}_2|^2$$

b) Conservation de la masse :

$$\underbrace{\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV}_{\substack{\equiv 0 \\ \text{stationnaire} \\ \text{incompressible}}} + \int_S \vec{n} \cdot (\rho \vec{v}) dS = 0$$

$$-\rho v_1 S_1 + \rho v_2 S_2 = 0$$

avec le résultat de l'équation 6

$$S_1 = S_2 = S$$

c) Quantité de mouvement

$$\underbrace{\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) dV}_{\substack{\equiv 0 \\ \text{stationnaire}}} + \int_S (\vec{n} \cdot \rho \vec{v}) \vec{v} dS = \sum \vec{F}$$

Quantité de mouvement selon l'axe x :

$$(-\rho v_1) v_1 S_1 + (\rho v_2) v_2 \cos \theta S_2 = -F$$

avec 6 + 7 on obtient :

$$-\rho v_1^2 S (1 - \cos \theta) = -F$$

$$F = \rho v_1^2 S (1 - \cos \theta)$$

F est la force agissant sur la surface de contrôle

Application numérique :

$$\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$$

$$v_1 = 12 \text{ m s}^{-1}$$

$$S_1 = 0.045 \text{ m}^2$$

$$\theta = 50^\circ$$

On a finalement : $F = 2315 \text{ N}$

■ Réponse Exercice n° 3, EFP Lausanne, 12 décembre 2005

Raisonnement

On montre que si H_2 augmente, la pression augmente aussi et comme l'énergie massique totale en 2 doit 1 en vertu de Bernouilli, il faut que \dot{Q}_2 diminue, donc S_2 doit croître et la membrane se dilater.

Démonstration

On néglige les pertes de charges. L'application de Bernouilli entre 1 et 3 nous donne :

$$\frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_3}{\rho} + gz_3 + \frac{v_3^2}{2}$$

$$\frac{p_{atm}}{\rho} + gH_1 = \frac{p_{atm}}{\rho} + \frac{v_3^2}{2}$$

$$gH_1 = \frac{v_3^2}{2}$$

$$v_3 = \sqrt{2gH_1}$$

d'où le débit volumique :

$$\dot{Q}_3 = S_3 \sqrt{2gH_1}$$

Appliquons Bernouilli entre 1 et 2 sachant qu'en 2 la membrane est infiniment flexible et déformable. On

$$p_2 = \rho g H_2 + p_{atm}$$

d'où

$$\frac{p_{atm}}{\rho} + gH_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}$$

$$\frac{p_{atm}}{\rho} + gH_1 = \frac{\rho g H_2 + p_{atm}}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}$$

$$v_2 = \sqrt{2g(H_1 - H_2)}$$

soit

$$\dot{Q}_2 = S_2 \sqrt{2g(H_1 - H_2)}$$

avec la conservation de la masse :

$$\dot{Q}_2 = \dot{Q}_3$$

On a finalement

$$S_2 = S_3 \sqrt{\frac{H_1}{H_1 - H_2}}$$

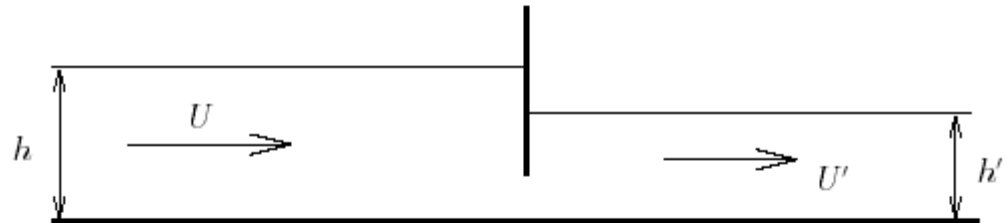
Vous pouvez retrouver un montage analogue à celui-ci chez votre médecin lorsqu'il vous prend la pression. À part le sang qui coule dans vos artères élastiques qui sont ici représentées par la paroi élastique en 2 et d'autre qui au moyen d'un manchon gonflable exerce une pression sur les artères qui sont ici représenté par la seconde de hauteur H_2 .

■ Exercice n° 1, EFP Lausanne, 9 janvier 2006

Vanne de décharge dans un canal.

Un canal à surface libre de section rectangulaire se termine sur une paroi verticale dont le fond est muni d'une décharge. La hauteur d'eau passe d'une valeur h à une valeur plus faible h' . On cherche la force exercée par la paroi pour un écoulement stationnaire.

On suppose que la vitesse est uniforme en amont et en aval de la vanne avec des valeurs U et U' . On néglige les frottements visqueux.

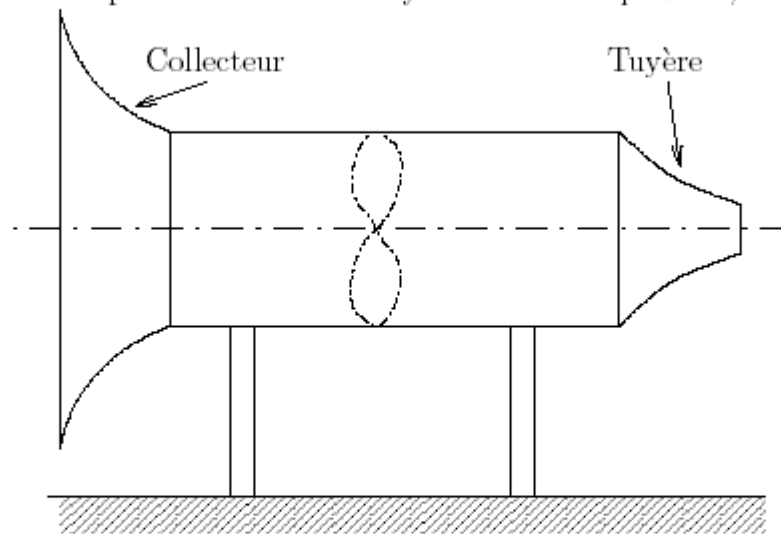


- Déterminer la force résultante sur la paroi.
- En utilisant la conservation de l'énergie, déterminer le rapport h/h' . Suivant la valeur de U , quand a-t-il lieu que h' est plus grand que h ?
- Est-il raisonnable de faire l'hypothèse de conservation de l'énergie ?

■ Exercice n° 2, EFP Lausanne, 9 janvier 2006

Etude d'une soufflerie.

Une soufflerie est prévue pour l'essai de maquettes dans le domaine des basses vitesses où l'air peut être fluide incompressible. L'air pris à l'atmosphère ambiante ($P_a = 10^5$ Pascals) pénètre dans la soufflerie par l'int collecteur, puis est mis en mouvement par un ventilateur pour s'écouler ensuite dans une tuyère convergente d l'atmosphère. Les maquettes sont disposées à la sortie de la tuyère. Dans tout le problème, on se place en rég



- Déterminer la résultante des forces de pressions (force nette) s'exerçant sur l'ensemble de la soufflerie.
On pourra négliger la vitesse de l'air dans le collecteur, l'écoulement sera considéré comme unidimensionnel, les pertes de charges pourront être négligées (écoulement de fluide parfait).
- Calculer la résultante des forces de pression (force nette) qui s'exercent sur la tuyère. Les pertes de charges sont négligées.
- Déterminer la différence de pression existant de part et d'autre de l'hélice du ventilateur (On applique Bernoulli en amont et en aval de l'hélice).
En déduire la poussée exercée par cette hélice sur son axe.

■ Exercice n° 3, EFP Lausanne, 9 janvier 2006

Tube de Pitot

Un tube de Pitot (voir la figure 1) est placé dans un écoulement d'eau pour mesurer la vitesse de l'écoulement. Le tube est placé de telle façon qu'il mesure la pression totale. La pression statique est mesurée au même point mais à la paroi.

Si le fluide dans le manomètre est du mercure, déterminez la vitesse de l'écoulement.

$$\begin{aligned}\rho_{eau} &= 10^3 \text{ [kg m}^{-3}\text{]} \\ \rho_{Hg} &= 13.6 \cdot 10^3 \text{ [kg m}^{-3}\text{]} \\ h &= 3.8 \text{ [cm]}\end{aligned}$$

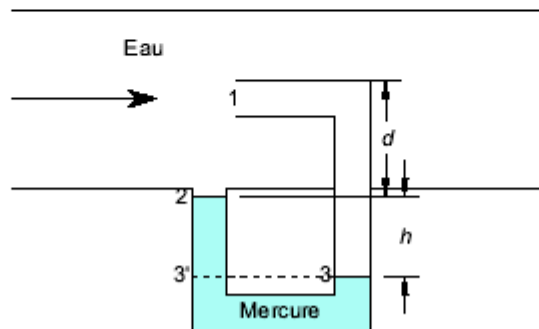


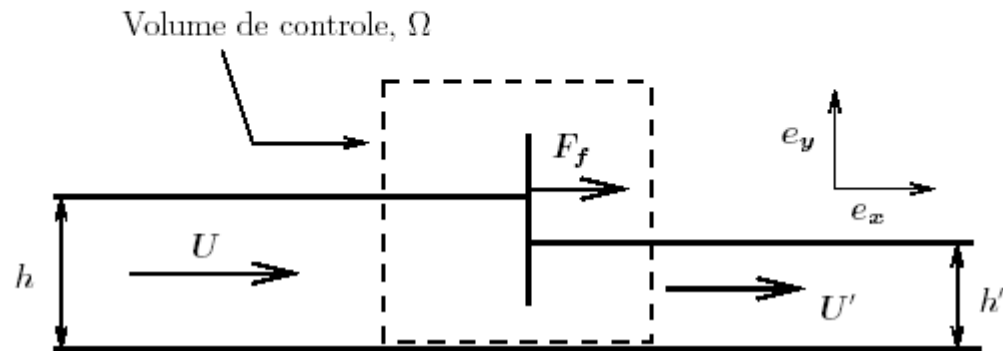
FIG. 1 – Tube de Pitot

■ Réponse Exercice n° 1, EFP Lausanne, 9 janvier 2006

a) Déterminer la résultante sur la paroi.

Prenons un volume de contrôle fluide et appliquons les équations de continuité et de conservation de la

mouvement.



Comme on a un écoulement stationnaire on peut écrire $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. Il reste donc dans les équation de la conservation de la masse :

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \rho \mathbf{U} dS = 0 \implies Uh = U'h',$$

et dans celle de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\int_S (\mathbf{n} \cdot \rho \mathbf{U}) \mathbf{U} dS = \sum F_{ext} \quad \text{avec} \quad \sum F_{ext} = -F_f - \int_S p \mathbf{n} dS$$

Pour calculer (2) il faut projeter cette écriture intégrale sur l'axe e_x :

$$\begin{aligned} -\rho U^2 h + \rho U'^2 h' &= -F_f + \int_0^h p_a + \rho g(h-y) dy - \int_0^{h'} p_a + \rho g(h'-y) dy - \int_{h'}^h p_a dy, \\ F_f &= \rho U^2 h (1 - h/h') + \rho g(h^2 - h'^2)/2. \end{aligned}$$

b) En utilisant la conservation de l'énergie, déterminer le rapport $\frac{h}{h'}$. Suivant la valeur de U , quand a-t-on Bernoulli + équation de continuité (1) :

$$\begin{aligned} p_a + \rho gh + \frac{U^2}{2} &= p_a + \rho gh' + \frac{U'^2}{2} \\ \left(1 - \frac{h}{h'}\right) \left(\frac{U^2}{2} \left(1 + \frac{h}{h'}\right) - gh'\right) &= 0 \end{aligned}$$

Deux solutions :

$$\begin{aligned} \frac{h}{h'} &= 1 \dots \text{Cela ne convient pas au problème} \\ \frac{h}{h'} &= \frac{2gh'}{U^2} - 1 \end{aligned}$$

On obtient aisément la valeur de U pour avoir $h' < h$:

$$U < \sqrt{2gh'}$$

■ Réponse Exercice n° 2, EFP Lausanne, 9 janvier 2006

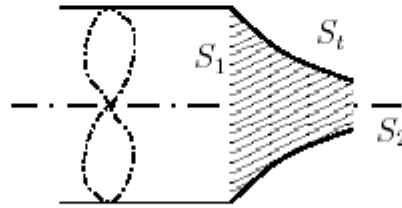
- a) Prenons un volume de contrôle V , avec $S = S_e \cup S_t \cup S_2$ comme surface et dS une longueur élémentaire. La conservation du débit nous donne : $V_e S_e = V_2 S_2$ avec les hypothèses données on a : $V_e = V_2 S_2 / S_e \ll V_2$. Le théorème de conservation du mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho V dV + \int_S (n \cdot \rho V) V dS = - \int_S p n dS$$

Explicitons chaque terme, le premier est nul étant donné que l'on est dans un écoulement stationnaire. (bitude le terme de pression peut s'écrire : $\int_S p n dS = p_a \int_S n dS + \int_S (p - p_a) n dS = F$. On obtient aisément le terme : $\int_S \rho u (u \cdot n) dS = (-\rho V_e^2 S_e + \rho V_2^2 S_2) e_x$. On recompile l'ensemble des résultats et l'on obtient :

$$F = -\rho V_2^2 S_2 e_x.$$

- b) Résultante sur la tuyère (R_t). Appelons S_t la surface de la tuyère. Prenons un volume de contrôle fluide $\Sigma = S_1 \cup S_t \cup S_2$.



La conservation du débit nous indique $V_1 S_1 = V_2 S_2$. Le théorème de Bernoulli annonce : $p_1 + \rho V_1^2 / 2 = p_2 + \rho V_2^2 / 2$. Soit par un tour de passe-passe : $p_1 = p_a + \rho V_2^2 (1 - (S_2/S_1)^2) / 2$. On écrit d'abord la conservation du mouvement.

$$\int_S (n \cdot \rho V) V dS = - \int_S p n dS$$

Le premier terme nous donne :

$$\int_S (n \cdot \rho V) V dS = -\rho V_1^2 S_1 e_x + \rho V_2^2 S_2 e_x$$

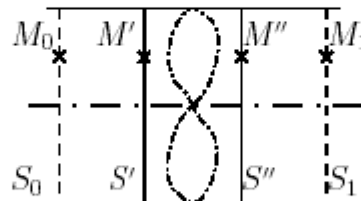
Le terme de pression donne après manipulation (avec $\int_S p n dS = p_a \int_S n dS + \int_S (p - p_a) n dS$) :

$$\int_S p n dS = -\frac{\rho}{2} S_1 V_2^2 \left(1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right) e_x + \underbrace{\int_{S_t} (p_t - p_a) n dS}_{R_t}$$

Finalement :

$$R_t = \left(\frac{\rho}{2} S_1 V_2^2 \left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right] + \rho V_1^2 S_1 - \rho V_2^2 S_2 \right) e_x = \frac{\rho}{2} S_1 V_2^2 \left(1 - \frac{S_2}{S_1} \right)^2 e_x$$

- c) Calcul de R_h , poussée de l'hélice sur son axe.



$$\text{— de } M_0 \text{ à } M' : p_a + \rho V_e^2 / 2 = p' + \rho V_1^2 / 2 \quad \Rightarrow \quad p' = p_a - \rho V_1^2 / 2$$

$$\text{— de } M'' \text{ à } M_1 : p'' + \rho V_1^2 / 2 = p_1 + \rho V_2^2 / 2 \quad \Rightarrow \quad p'' = p_a + \rho V_2^2 / 2 \left(1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right)$$

Finalement $\Delta p = p'' - p' = \rho V_2^2 / 2$. Prenons un volume de contrôle englobant l'hélice et appliquons la conservation du mouvement à ce volume, projettons sur e_x :

$$R_h = -S_1 \Delta p = -\rho \frac{V_2^2}{2} S_1$$

■ Réponse Exercice n° 3, EFP Lausanne, 9 janvier 2006

Pression totale en 1 :

$$P_{o1} = p_1 + \frac{1}{2} \rho_{eau} v_1^2$$

d'autre part.

$$p_{3'} = p_1 + \rho_{eau} g d + \rho_{Hg} g h$$

et

$$p_3 = P_{o1} + \rho_{eau} g d + \rho_{eau} g h$$

avec

$$p_3 = p_{3'}$$

d'où

$$\rho_{eau} v_1^2 = 2(\rho_{Hg} - \rho_{eau}) g h$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(\rho_{Hg} - \rho_{eau}) g h}{\rho_{eau}}}$$

Application numérique

$$v_1 = 3.06 \text{ m/s}$$

■ Exercice n° 1, EFP Lausanne, 23 janvier 2006

Turbine Pelton

Dans le cadre d'un projet de construction de barrage, le maître d'oeuvre vous demande de calculer la force exercée sur une turbine Pelton. La turbine peut être schématisée par la figure 1.

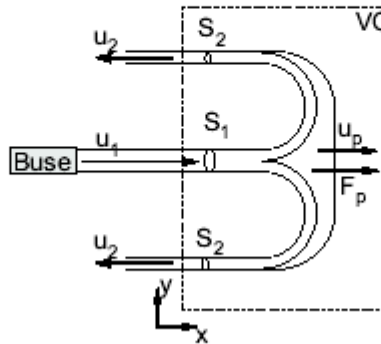


FIG. 1 – Turbine Pelton schématique

On vous demande de calculer la force F_p sur la turbine :

- a) si celle-ci est à l'arrêt $u_p = 0$,
- b) si elle est en mouvement à vitesse constante $u_p = cste$:
 - i) avec un volume de contrôle VC fixe par rapport à la buse du jet,
 - ii) avec un volume de contrôle VC attaché à la pale de la turbine.

Hypothèses :

- le fluide est incompressible,
- le fluide est idéal,
- $u_1 = \overline{u_1}$,
- le nombre de Froude $Fr = \frac{u^2}{gH}$ est élevé.

■ Exercice n° 2, EFP Lausanne, 23 janvier 2006

Écoulement dans une conduite

Un fluide incompressible s'écoule en régime permanent dans une conduite de rayon R (figure 2). A l'entr est uniforme et égale à V_1 . A la section 2, où l'écoulement est laminaire, la vitesse varie suivant la relation :

$$V = V_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

Démontrer que :

$$\frac{V_1}{V_{max}} = \frac{1}{2}$$

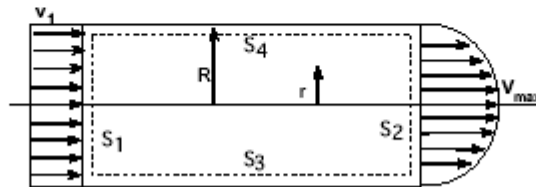


FIG. 2 – Conduite de rayon R

■ Réponse Exercice n° 1, EFP Lausanne, 23 janvier 2006

- a) Dans cette première partie nous cherchons à calculer la force qui s'exerce sur la pôle de la turbine alc dernière ne bouge pas ($u_p = 0$).

L'équation de la conservation de la masse nous donne :

$$\underbrace{\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV}_{\substack{\equiv 0 \\ \text{stationnaire} \\ \text{incompressible}}} + \int_S \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{u}) dS = 0$$

$$-u_1 S_1 + 2u_2 S_2 = 0$$

Les équations de conservation de la quantité de mouvement prennent la forme :

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) dV + \int_S (\mathbf{n} \cdot \rho \mathbf{u}) \mathbf{u} dS = \sum \mathbf{F}$$

Selon l'axe X¹ :

$$-\rho S_1 u_1^2 - 2\rho S_2 u_2^2 = F_x$$

En reprenant Bernoulli :

$$\frac{p_a}{\rho} + gz_1 + \frac{u_1^2}{2} = \frac{p_a}{\rho} + gz_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

Sachant que le nombre de Froude est élevé : $u^2 \gg gz$ et que la pression du jet est constante et vaut p_{atm} on écrit :

$$|u_1| = |u_2|$$

Finalement :

$$F_x = -2\rho u_1^2 S_1 = -F_p$$

$$F_p = 2\rho u_1^2 S_1$$

b) Dans cette seconde partie nous calculons la force exercée par le jet sur la pôle de la turbine alors que cette est en mouvement à la vitesse u_p .

i) Dans un premier temps nous faisons le calcul avec un volume de contrôle VC fixe par rapport à la b

L'équation de la conservation de la masse (1) devient :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV}_{\rho u_p S_1 + 2\rho u_p S_2} + \underbrace{\int_S \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{u}) dS}_{-\rho u_1 S_1 + \rho u_2 S_2} = 0$$

Le volume de fluide contenu dans le volume de contrôle augmente de $u_p S_1 + 2u_p S_2$ en dt .

$$\rho u_p S_1 + 2\rho u_p S_2 - \rho u_1 S_1 + \rho u_2 S_2 = 0$$

Appliquons maintenant Bernoulli. Attention, il faut l'utiliser dans un référentiel fixe par rapport à la pôle pour avoir un écoulement stationnaire (condition nécessaire pour utiliser Bernoulli!!!)

$$\frac{p_a}{\rho} + gz_1 + \frac{(u_1 - u_p)^2}{2} = \frac{p_a}{\rho} + gz_2 + \frac{(u_2 + u_p)^2}{2}$$

Sachant que le nombre de Froude est élevé : $u^2 \gg gz$ et que la pression du jet est constante et vaut p_{atm} on peut écrire :

Donc :

$$u_1 - u_p = u_2 + u_p \text{ tant que } u_1 > u_p$$

Et enfin :

$$u_2 = u_1 - 2u_p$$

D'où avec l'équation (5) :

$$(u_1 - u_p)(S_1 - 2S_2) = 0$$

Dans une roue Pelton, pour que le jet entraîne la roue, il faut bien que le jet soit plus rapide que la roue. On peut donc écrire :

$$u_1 > u_p$$

Donc :

$$u_1 \neq u_p \text{ et donc } u_1 - u_p \neq 0$$

Finalement :

$$S_1 = 2S_2$$

Le système d'équations de la conservation de la quantité de mouvement (2) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho \mathbf{u}) dV + \int_S (\mathbf{n} \cdot \rho \mathbf{u}) \mathbf{u} dS = F_x$$

$$\underbrace{\underbrace{\rho u_1 u_p S_1}_{\text{jet central}} - \underbrace{2\rho u_2 u_p S_2}_{\text{2 jets latéraux}}}_{\text{Volume}} - \underbrace{\rho u_1^2 S_1 - 2\rho u_2^2 S_2}_{\text{Surface}} = F_x$$

En injectant (7) et (8) dans l'équation précédente :

$$\underbrace{\underbrace{\rho u_1 u_p S_1}_{\text{jet central}} - \underbrace{\rho(u_1 - 2u_p)u_p S_1}_{\text{2 jets latéraux}}}_{\text{Volume}} - \underbrace{\rho u_1^2 S_1 - \rho(u_1 - 2u_p)^2 S_1}_{\text{Surface}} = F_x$$

$$-2\rho S_1 \underbrace{(u_1^2 - 2u_1 u_p + u_p^2)}_{(u_1 - u_p)^2} = F_x = -F_p$$

Finalement :

$$F_p = 2\rho(u_1 - u_p)^2 S_1$$

- ii) Dans un second temps nous faisons le calcul avec un volume de contrôle VC attaché à la pôle. Nous nous dans le même cas que pour la partie a) avec $u_1 \rightarrow (u_1 - u_p)$ et $u_2 \rightarrow (u_2 + u_p)$
Soit les résultats, pour la conservation de la masse :

$$-(u_1 - u_p)S_1 + 2(u_2 + u_p)S_2 = 0$$

pour la conservation de la quantité de mouvement selon X :

$$-\rho S_1(u_1 - u_p)^2 - 2\rho S_2(u_2 + u_p)^2 = F_x$$

et pour Bernoulli :

$$u_1 - u_p = u_2 + u_p$$

Finalement nous retrouvons le résultat (9)

$$F_p = 2\rho(u_1 - u_p)^2 S_1$$

¹attention aux signes! C'est bien $-2S_2 u_2^2$ car u_2 est dans la direction $-X$

On applique l'équation de continuité au volume de contrôle ci-dessus :

$$\underbrace{\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV}_{\substack{\equiv 0 \\ \text{stationnaire} \\ \text{incompressible}}} + \int_S \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{u}) dS = 0$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 : \rho = a$$

Pas de contribution au débit des sections S_3 et S_4 , d'où :

$$\rho \int_{S_1+S_2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

$$dS = -2\pi \cdot r \cdot dr$$

$$-\int_{S_1} v_1 \cdot dS + \int_{S_2} v_2 \cdot dS = 0$$

$$-\int_0^R v_1 \cdot 2\pi r dr + \int_0^R V_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r dr = 0$$

$$-v_1 \cdot 2\pi \frac{R^2}{2} + V_{max} 2\pi \frac{R^2}{2} - V_{max} 2\pi \frac{R^4}{4R^2} = 0$$

$$-v_1 \pi R^2 + V_{max} 2\pi \frac{R^2}{2} = 0$$

$$\frac{v_1}{V_{max}} = \frac{1}{2}$$

■ Exercice n° 1, EFP Lausanne, 6 février 2006

Bassin de carène

Faisons l'hypothèse que le coefficient de traînée C_x s'exerçant sur un navire est dépendant uniquement de la Froude Fr et du Nombre de Reynolds Re , de telle sorte que :

$$C_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho U^2 L^2} = f(Fr, Re)$$

avec

$$Fr = \frac{U^2}{g L}$$

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu}$$

Un bassin de carène vous propose de construire un modèle réduit à l'échelle 1/10 du navire que vous souhaitez déterminer la traînée directement à partir des essais sur le modèle réduit. Pour cela on se propose de calculer les échelles de vitesses selon les deux grandeurs adimensionnelles caractéristiques. Qu'en pensez-vous ?



FIG. 1 – Essai en bassin de carène

■ Exercice n° 2, EFP Lausanne, 6 février 2006

Modèle de barrage

On doit construire un modèle de barrage. Par manque de place dans le laboratoire, on a choisi deux échelles pour les dimensions horizontales et verticales :

$$\left(\frac{L_m}{L_p} \right)_H = \frac{1}{100}$$

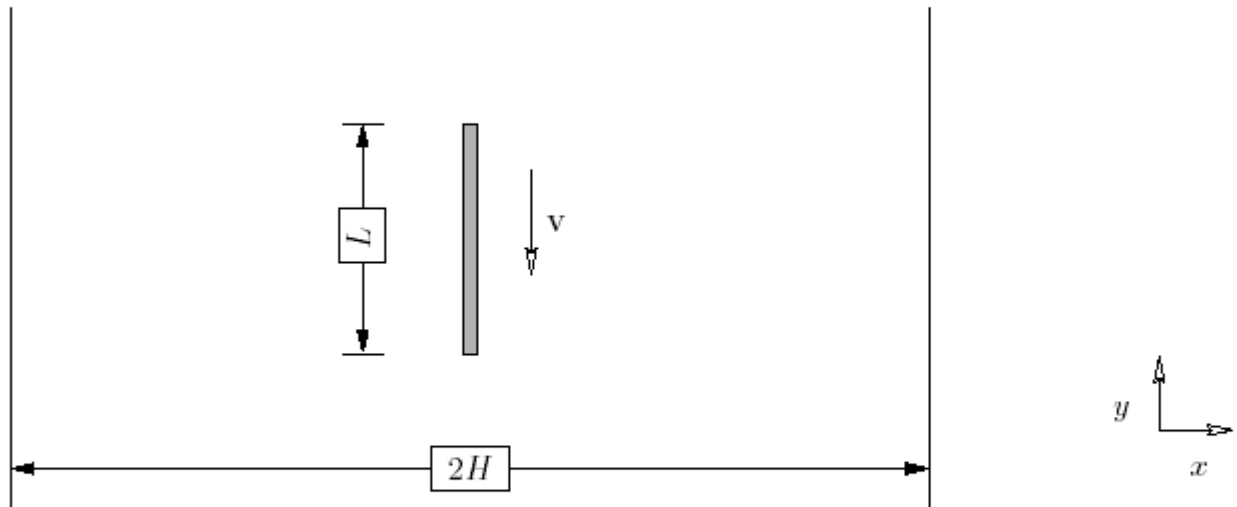
$$\left(\frac{L_m}{L_p} \right)_V = \frac{1}{50}$$

- Quelle échelle de longueur (verticale ou horizontale) doit-on prendre lorsqu'on considère le rapport de similitude ?
- Le débit maximum du prototype est de $120000 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. Quel débit doit-on prendre en considération pour le modèle ?

■ Exercice n° 3, EFP Lausanne, 6 février 2006

Navier-Stokes

Une plaque plane d'épaisseur $d \approx 0$, de longueur L et de masse m est entraînée verticalement par son p un fluide incompressible de viscosité μ , contenu dans une cavité de grande profondeur et de largeur $2H$. déterminer la vitesse (constante) de chute atteinte par la plaque (en la supposant loin du fond).



Procédure :

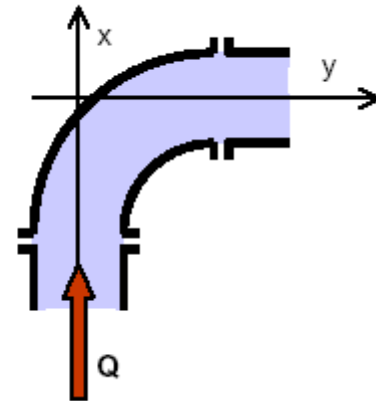
- Déterminez le profil de vitesse $v(x)$ à hauteur de la plaque en supposant que l'écoulement entre la p de la cavité est établi : $u = u(x)$ et $v = v(x)$.
- Déterminez le gradient de pression généré par le déplacement de la plaque.
- Déterminez la vitesse asymptotique de chute.

■ Exercice n° 1, Université Joseph Fourier, Grenoble

Effort sur un coude

Un tube de section **A** circulaire de diamètre **D**, coudé à angle droit est posé sur un plan horizontal. Il contient de l'eau à la pression effective moyenne **p_m**.

- 1) Pour un écoulement de débit **Q**, déterminer la résultante horizontale **R_h** des forces exercées par l'eau sur le coude.
- 2) Que devient cette résultante quand le débit est négligeable ?

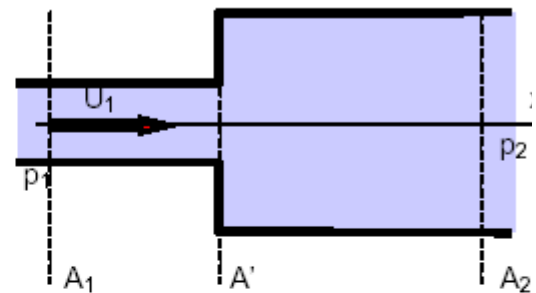


■ Exercice n° 2, Université Joseph Fourier, Grenoble

Perte de charge dans un élargissement brusque

Une conduite de section circulaire **A₁ = 10 cm²** présente un élargissement brusque de rapport **α = A₁/A₂ = 1/3** (figure ci-contre). Le fluide de masse volumique **ρ = 1,35 · 10³ kg/m³** est en écoulement permanent, la vitesse amont étant **U₁ = 10 m/s**.

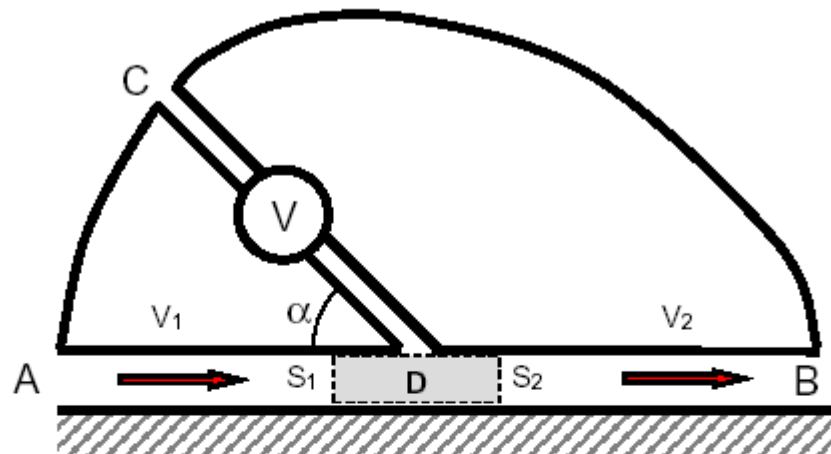
Dans les sections amont **A₁** et aval **A₂** la vitesse sera considérée comme uniforme ; On exprimera les résultats en fonction des conditions amont et de **α**.



- 1) Quelle est la configuration de l'écoulement de fluide réelle dans l'élargissement brusque ?
- 2) En supposant la que dans les sections **A₁** et **A'** de la conduite, les pressions sont égales, calculer la variation de pression **ΔP = P₂ – P₁**
- 3) En déduire la perte de charge singulière **Δh** subie par le fluide à la traversée de l'élargissement brusque.
- 4) Quelle est alors l'expression et la valeur du coefficient de perte de charge singulière **ξ₁** ?

■ Exercice n° 3, Université Joseph Fourier, Grenoble

Ecoulement secondaire dans la ventilation d'un tunnel



La ventilation d'un tunnel rectiligne de section **A**, ouvert à l'air libre à ses deux extrémités A et B, est assurée par un ventilateur V qui injecte près de l'entrée A (section **a** avec une inclinaison α) de l'air aspiré en C avec une vitesse **v**. Un courant d'air s'établit dans le tunnel : soient **V₁** la vitesse à gauche de la section S₁ et **V₂** à droite de la section S₂, située à une distance assez grande du point d'injection pour que l'on puisse y considérer l'écoulement uniforme.

La perte de charge singulière dans la zone d'entrée du tunnel vaut $0,5 \cdot V_1^2 / 2g$; la perte de charge régulière entre la section A₂ et la section de sortie du tunnel est de la forme $\xi \cdot V_2^2 / 2g$. On négligera les autres pertes de charge. L'air est supposé incompressible et non pesant de masse volumique $\rho = 1,29 \text{ kg/m}^3$.

- 1) tracer la configuration de l'écoulement à l'extérieur et à l'intérieur du tunnel
- 2) Donner l'expression de la pression **P₁** dans la section S₁ et de la pression **P₂** dans la section S₂
- 3) En appliquant au domaine D de fluide hachuré sur la figure les deux principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Etablir une équation entre l'inconnue $\chi = V_1/v$ aux deux paramètres α et $\sigma = a/A$.
- 4) Résoudre cette équation dans le cas où l'angle α est assez petit pour que $\cos \alpha = 1$. Montrer que la solution obtenue n'a de sens que si σ est inférieur à une valeur σ_1 que l'on déterminera et qu'il existe une valeur σ_2 pour laquelle χ atteint un maximum.
- 5) A.N. $A = 50 \text{ m}^2$; $a = 2 \text{ m}^2$; $\xi = 4$, $Q_1 = 30 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$

Quelle doit être la valeur de **Qv**. Quelles sont alors les valeurs des pressions **P₁** et **P₂**.

■ Réponse Exercice n° 1, Université Joseph Fourier, Grenoble

1. Le théorème des quantités de mouvement donne :

(Attention à l'orientation des normales aux surfaces définissant le domaine de contrôle)

$$R_h = \sqrt{2} \left(4 \frac{\rho^2}{\rho^2} - \frac{1}{4} \rho m \rho^2 \right)$$

$$2. \frac{1}{4} \sqrt{2} \rho m \rho^2$$

Application numérique : D = 100 mm, Q = 100 l/s, $p_m = 10$ bars :

$$R_{h1} = 12,9 \text{ kN} ; R_{h2} = 11,1 \text{ kN}$$

■ Réponse Exercice n° 2, Université Joseph Fourier, Grenoble

1. Au sortir de l'élargissement brusque, l'écoulement forme un jet qui tend à retrouver le contact avec la paroi (voir figure). Les zones en dehors de l'écoulement principal sont des zones de recirculation ou zones d'eau mortes.

2. On ne peut pas utiliser la relation de Bernoulli car on ne connaît pas la perte de charge au passage de l'élargissement. En appliquant le théorème des quantités de mouvement au domaine D (voir figure), on obtient :

$$P_2 - P_1 = \rho U^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

3.

$$\rho h = P_2 - P_1 = \frac{1}{2} \rho U^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

En injectant la relation trouvée dans l'exercice 1 :

$$h = \frac{1}{2} \frac{U^2}{g}$$

4.

$$h = \frac{1}{2} \frac{C^2}{g}$$

$$h = \frac{1}{2} \frac{C^2}{g}$$

■ Réponse Exercice n° 3, Université Joseph Fourier, Grenoble

2. En appliquant Bernoulli entre l'extérieur et S1 d'une part et entre S2 et l'extérieur, on obtient :

$$p_1 + \frac{\rho}{2} V_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} V_2^2$$

3. La conservation du débit amène

$$V_1 S_1 = V_2 S_2$$

Le théorème des quantités de mouvement donne : Attention à l'orientation des normales aux surfaces définissant le domaine de contrôle

$$\rho Q \left(\frac{V_1}{2} - \frac{V_2}{2} \right) = \rho Q \left(\frac{V_1}{2} - \frac{V_2}{2} \right)$$

4. Dans la résolution ci-dessous, $x_{si} = 4$ a été utilisé

$$K_{hisol} = \frac{1}{9} \sqrt{10} \approx 0,36$$

$$K_{hisol} = \frac{1}{9} \frac{10 \sqrt{10} \sqrt{2}}{\sqrt{10} \sqrt{2}}$$

Voir courbe 1 & 2

5.

$$\alpha = 0,04$$

$$\mu = 0,09$$

$$Q_V = 13,3 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

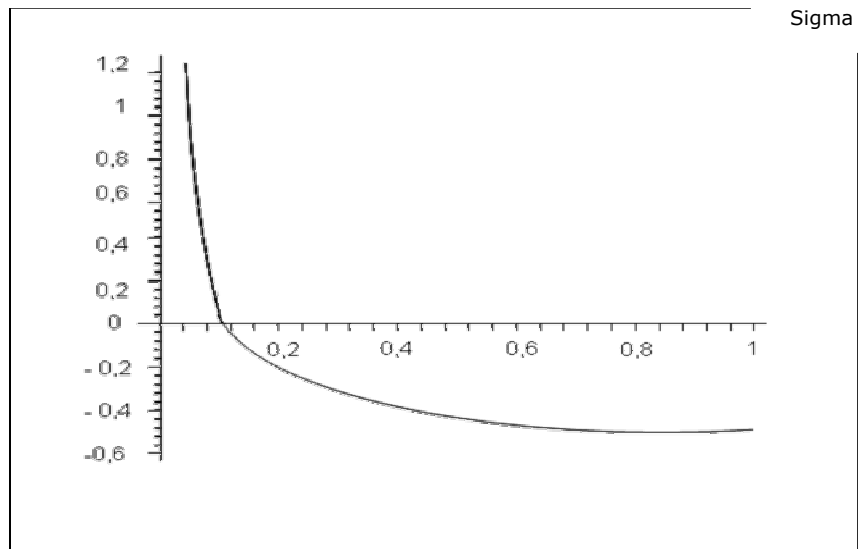
$$P_1 = 0,35 \text{ Pa}$$

$$V_2 = 0,87 \text{ m s}^{-1}$$

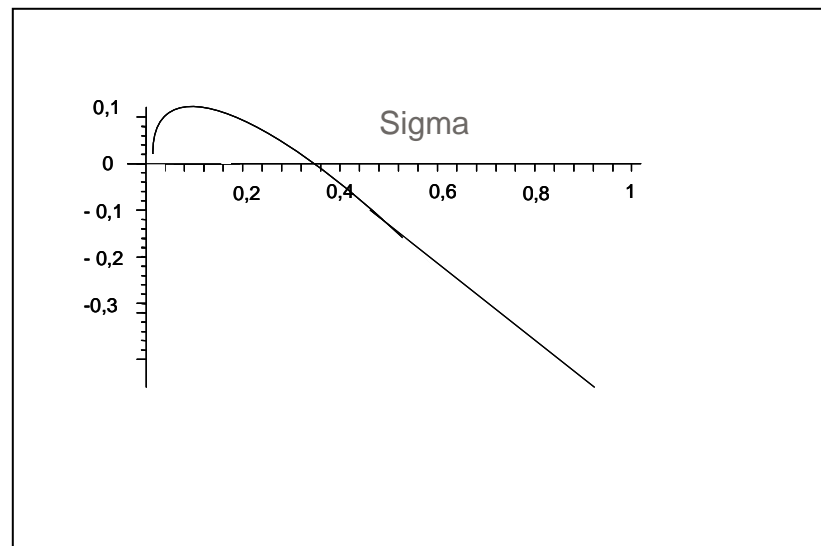
$$P_2 = 0,35 \text{ Pa}$$

■ Courbe 1

Sigma



■ Courbe 2



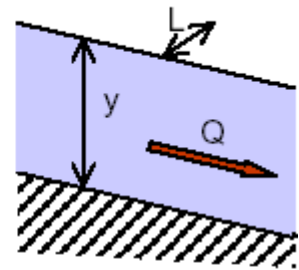
$$M_{\max} = 0,1023$$

$$\sigma = 0,097$$

■ Exercice n° 4, Université Joseph Fourier, Grenoble

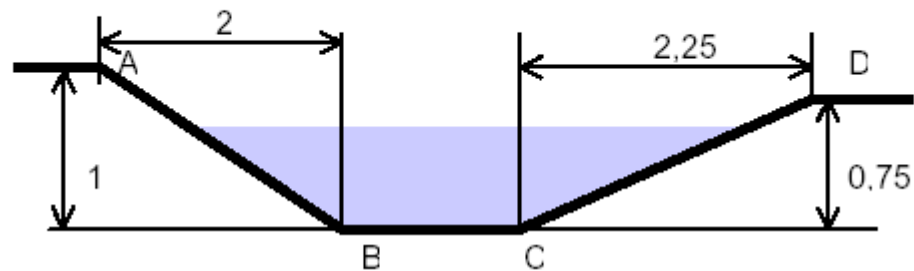
Canal d'irrigation

Soit un canal d'irrigation à section rectangulaire uniforme de pente (i) devant transiter un débit permanent Q . on cherche le tirant d'eau (y) et la largeur (L) pour que la section mouillée soit minimale ?



- 1) A partir des formules de Chezy et de Manning établir le débit d'un écoulement en canal uniforme.
- 2) traduire la condition de surface mouillée minimale en une condition sur le périmètre mouillé
- 3) trouver alors une relation entre y et L
- 4) exprimer la longueur L en fonction des données du problème (i , Q , K_s)
- 5) AN : $i = 5^\circ$, $Q = 100 \text{ m}^3/\text{s}$, $K_s = 60 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$

■ Exercice n° 5, Université Joseph Fourier, Grenoble

débit maxi d'un canal

On considère la section droite ABCD d'un canal. Le fond du canal BC est à l'altitude $z_c = 115,25 \text{ m}$ et sa largeur est $BC = 1,5 \text{ m}$. En rive droite se trouve un terre-plein horizontal à l'altitude $z_D = 116 \text{ m}$. En rive gauche se trouve un terre-plein horizontal à l'altitude $z_A = 116 \text{ m}$. La pente du canal est de 50cm par km. La pente de la berge AB est de 50% et celle de CD est de 33,3%. La hauteur d'eau dans le canal est $h = 0,5 \text{ m}$. Le débit de l'écoulement est $0,875 \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$.

- 1) Quelle est la valeur du coefficient de Strickler du canal ?
- 2) Quel est le débit maximum en écoulement uniforme qui peut être évacué par sans que le terre plein soit inondé ?

■ Exercice n° 6, Université Joseph Fourier, Grenoble

rétrécissement d'un canal

On considère un canal de section droite rectangulaire de largeur $L = 10 \text{ m}$ et de pente à 5.10^{-4} . Le coefficient de Strickler du canal est égal à 60 unités SI.



1. Quel est le débit Q pour un écoulement uniforme dans ce canal et pour une d'eau $h = 2\text{m}$?

2. Pour ce débit calculer la profondeur critique h_c . En déduire la nature de l'écoulement (torrentiel ou fluvial).

Ce canal comporte un rétrécissement au bout duquel la largeur devient $L' = 7\text{m}$.

3. Comment évolue la ligne d'eau de l'écoulement à travers ce rétrécissement prog

4. En négligeant la perte de charge provoquée par ce rétrécissement (écoulement charge spécifique constante), calculer la profondeur h' de l'écoulement à l'rétrécissement pour le débit Q calculé précédemment.

■ Réponse Exercice n° 4, Université Joseph Fourier, Grenoble

1)

$$Q = Ks.S.R_h^{2/3} . i^{1/2}$$

2)

$$\chi(S) = (Ks.i^{1/2}/Q)S^{5/2} \rightarrow d\chi=0 \text{ pour } ds=0.$$

3)

$$y = L/2$$

4)

La formule $Q = K.S.R_h^{2/3} . i^{1/2}$ en remplaçant S par $L^2/2$ et R_h par $L/4$, se transforme en :

$$L = 2^{7/8} * (Q/(Ks.i^{1/2}))^{3/8}$$

5)

$$L = 3,51m$$

■ Réponse Exercice n° 5, Université Joseph Fourier, Grenoble

1)

$$Ks = Q / (S.R_h^{2/3} . i^{1/2})$$

$$AN : Ks = 59,9$$

2)

$$Q_{max} \text{ pour } h_{max}=0,75m \rightarrow Q_{max} = 2,01 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$$

■ Réponse Exercice n° 6, Université Joseph Fourier, Grenoble

1.

$$Q = Ks.S.R_h^{2/3}.i^{1/2}$$

$$AN : Q = 34 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$$

2.

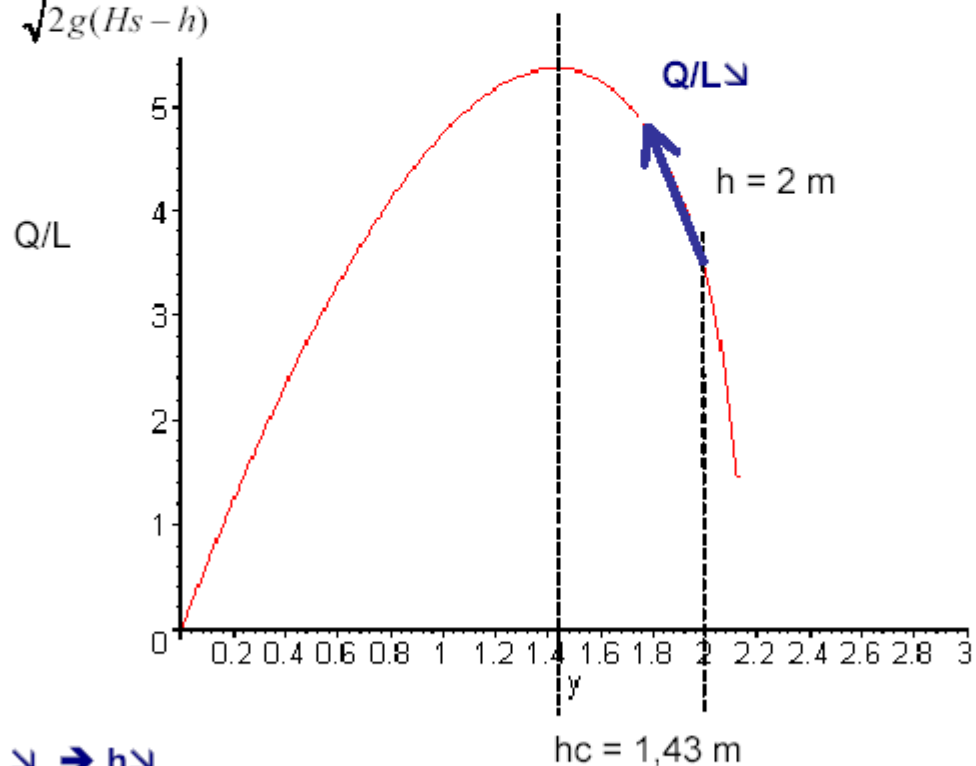
$$hc = (Q^2/g.L^2)^{1/3}$$

$$AN : hc = 1.05 \text{ m}$$

3.

Ecrire $Q(h)$ en partant de l'expression de la hauteur spécifique $Hs = h + U^2/2g$.

$$\rightarrow \frac{dQ}{dh} = \frac{2gL(Hs - h) - glh}{\sqrt{2g(Hs - h)}}$$



$$L \nearrow \rightarrow Q/L \searrow \rightarrow h \searrow$$

4.

$$Hs = \text{cte} \rightarrow \text{résoudre } h'^2.Hs - h'^3 = Q^2/(2.g.L'^2)$$

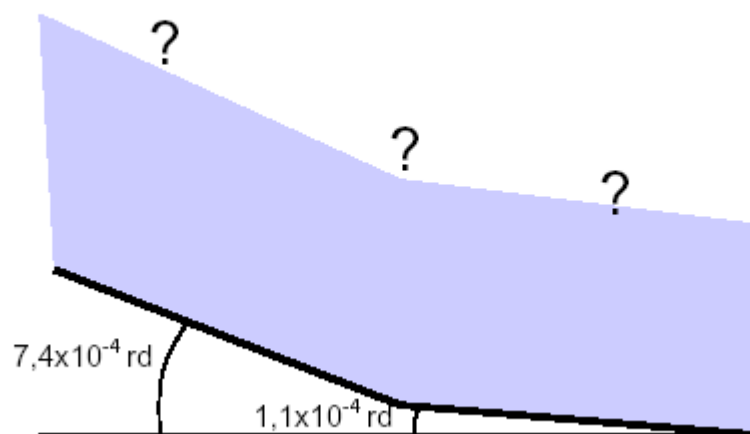
La seule solution fluviale pour h' est $h' = 1,75 \text{ m}$ (résolution numérique).

■ Exercice n° 7, Université Joseph Fourier, Grenoble

Ligne d'eau au raccordement du cours moyen et du cours inférieur du fleuve jaune

On se propose d'estimer la ligne d'eau au raccordement du cours moyen de pente ($7,4 \times 10^{-4}$ rd) et du cours inférieur ($1,1 \times 10^{-4}$ rd) du fleuve Jaune, en supposant que la transition entre les deux pentes est brutale. On cherche en particulier à évaluer la distance en amont du changement de pente à laquelle la hauteur d'eau ne diffère plus que de 5 cm par rapport à la hauteur normale. Il sera nécessaire d'effectuer une résolution numérique en utilisant une calculatrice programmable ou un tableur sur PC. On étudie en particulier les conditions suivantes : débit linéique $Q/L = 10 \text{ m}^2/\text{s}$; coefficient de Strickler : $K_S = 20 \text{ usi}$.

- 1) calculer les hauteurs normales h_n et hauteurs critiques h_c pour chaque partie du fleuve.
- 2) Exprimer dh/dx en fonction de la pente de fond I et de la pente de la ligne de charge J . exprimer également dh/dx en fonction du nombre de Froude et de dh/dx . Etudier alors les variations de dh/dx et tracer la forme des lignes d'eau pour les valeurs relatives de h_c et h_n calculées précédemment.
- 3) Vérifier qu'à 15km en amont du changement de pente la hauteur h diffère de moins de **0,05m** de h_n .



■ Réponse Exercice n° 7, Université Joseph Fourier, Grenoble

1)

$$hc_1 = hc_2 = (Q^2/gL^2)^{1/3} = 2,17 \text{ m}$$

$$hn_1 = (Q/(L.Ks.i^{3/2}))^{3/5} = 5,74 \text{ m}$$

$$hn_2 = 10,16 \text{ m}$$

→ canal à faibles pentes

2)

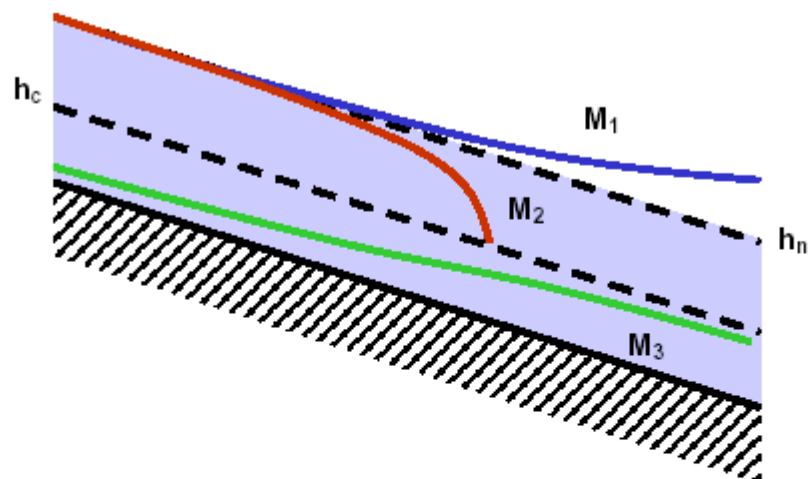
$dHs/dx = dH/dx - dZ/dx = -J - (-i) = i - J$ où i est la pente de fond et J la pente de la ligne de charge.

Or $dHs/dx = (1-Fr^2).dh/dx$

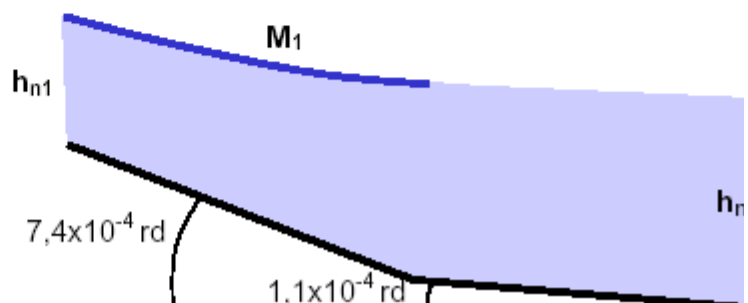
Soit $dh/dx = (i - J)/(1-Fr^2)$.

J est donné par la formule de chezy : $J = Q^2/(Ks^2.S^2.Rh^{4/3})$

	0	hc	hn	∞
$i - J$	-		0	+
$1 - Fr^2$	-	0	+	+
dh/dx	+	∞	0	+
	Ligne verte		Ligne rouge	Ligne bleue



Dans notre cas la ligne de raccordement est une ligne de type M1. ($h > h_n$ et dh/dx croît)

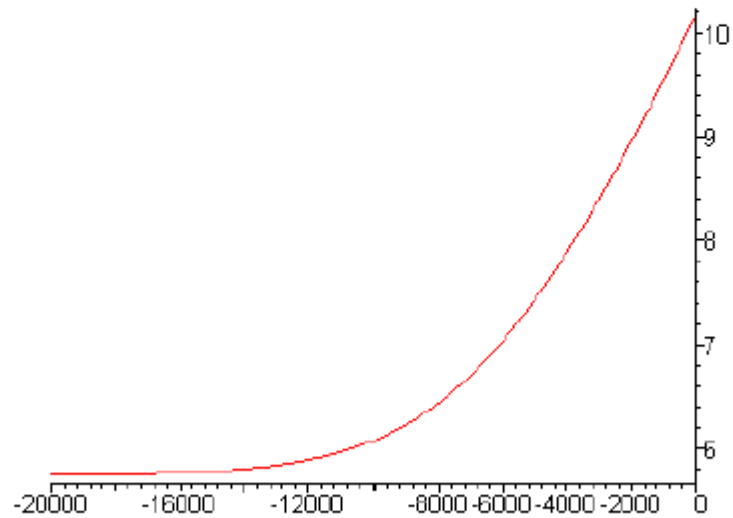


3)

En remplaçant par leur expression **J** et **Fr** dans l'équation différentielle de $dh/dx = (i - J)/(1 - Fr^2)$ et en remarquant que $gh^3 \gg Q^2/L^2$ on obtient :

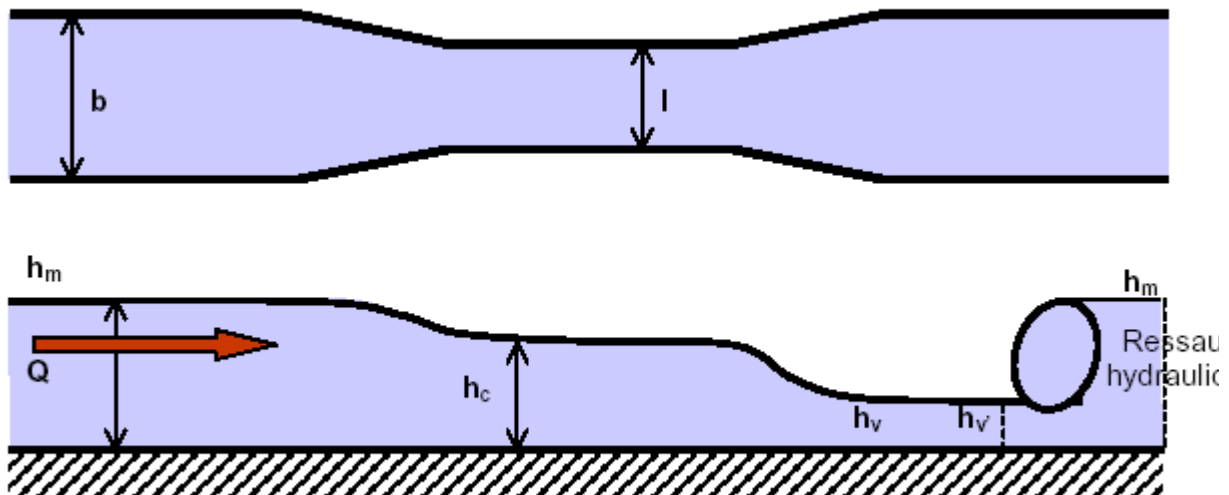
$$h^{10/3} \cdot (dh/dx - i) + Q^2/(Ks^2 \cdot L^2) = 0$$

on trouve numériquement la solution ci-dessous pour $h(0) = h_{n2} = 10,16m$



Pour cette solution, $h(-15000) = 5,78m$ soit une différence de $0,04m$ avec h_{n1} .

■ Problème n° 1, Année 2003/2004, Université Joseph Fourier, Grenoble

Passage d'un rétrécissement latéral

On étudie un écoulement uniforme dans un canal rectangulaire ($h = h_m$ loin à l'amont et loin à l'aval) au passage d'un rétrécissement latéral symétrique de longueur AB. Ce dernier provoque une transition d'un écoulement fluvial en un écoulement torrentiel, le retour à l'écoulement fluvial se faisant au travers d'un ressaut hydraulique (voir figure).

On note b la largeur du canal à l'amont du rétrécissement, l la largeur rétrécie, g l'accélération de la pesanteur, Q le débit volumique et h_m , h_v , h_c les profondeurs respectivement à l'amont (fluvial), à l'aval (torrentiel), et au niveau de la section rétrécie.

On suppose que h_c est égale à la profondeur critique.

- 1) dire pourquoi $h_v < h_c < h_m$.
- 2) montrer que dans la section rétrécie, la charge spécifique H_s s'écrit : $H_s = 3/2 h_c$.
- 3) En supposant que la charge spécifique se conserve entre l'amont et la section rétrécie, exprimer le débit Q en fonction de h_m , h_c , g et b .
- 4) Montrer alors qu'en posant, $h_c = \alpha h_m$, on a nécessairement $2/3 < \alpha < 1$.
- 5) En déduire que $Q = Kb\sqrt{2g}(h_m)^{3/2}$, avec $K = \sqrt{3/2\alpha - 1}$

quelques mètres après le rétrécissement le canal ayant la même pente qu'à l'amont les pertes de charges vont provoquer un ressaut hydraulique. On donne $Q = 100\text{m}^3/\text{s}$, $b = 20\text{m}$ et $h_m = 2\text{m}$.

6) en appliquant le théorème des quantités de mouvement, retrouver la relation (relation dite de conjugaison) entre la hauteur h_v' à l'amont du ressaut et la hauteur h_m retrouvée à l'aval. Calculer la hauteur h_v' . Tracer l'évolution de la hauteur d'eau sur un graphe $H_s(h)$ depuis l'amont du rétrécissement.

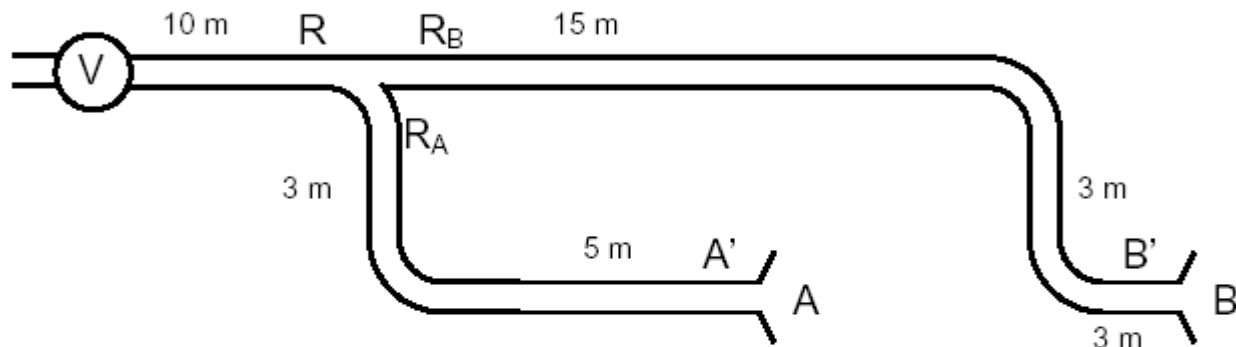
7) En déduire la perte de charge au passage du ressaut.

■ Problème n° 2, Année 2003/2004, Université Joseph Fourier, Grenoble

Dimensionnement de réseau aéraulique

On se propose d'explorer 2 méthodes de dimensionnement de réseau aéraulique.

Le réseau représenté sur la figure ci-dessous est réalisé à partir de conduits circulaires en tôle galvanisée. Les sorties de conduits sont constituées par des grilles présentant entre **A** et **A'** (Resp. **B'** et **B**) une perte de charge de 30 Pa. Les deux bouches de sortie débitent chacune 3000 m³/h dans deux salles à la pression atmosphérique ($P_B = P_A = P_{atm}$). Les coude sont à $R/D = 1$ soit un coefficient de perte de charge singulière $\xi_{coude} = 0,22$. La dérivation est constituée par un assemblage dont les pertes de charge singulières pour chaque branche valent respectivement $\xi_A = 0,56$ et $\xi_B = 0,18$. La masse volumique de l'air est $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$, et la viscosité dynamique est $\mu = 1,5 \cdot 10^{-5}$.



La première méthode consiste à obtenir une vitesse constante de l'air dans chacun des conduits.

1) Déterminer le diamètre des conduits pour une vitesse **$U=10\text{m/s}$** (ce qui évite d'avoir trop de bruit).

2) Déterminer les pertes de charges de chaque branche du réseau. Vous remplirez pour cela le *tableau 1* de la feuille réponse. Vous utiliserez le diagramme de Moody Mourine pour calculer le coefficient de perte de charge linéaire, à partir du calcul du Reynolds et des valeurs de rugosités équivalentes données dans le *tableau 1*.

3) Ce réseau est-il équilibré (même perte de charge dans les branches **A** et **B** à 10 Pa près) ?

Les réseaux ne pouvant fonctionner que de manière équilibrée, si les pertes de charge dans l'une et l'autre branche ne sont pas identiques, il en résulte une modification des débits dans chaque branche, et donc le non respect du cahier des charges. Dans le cas où ce réseau ne serait pas équilibré, proposez une solution qui permette de respecter le cahier des charges et d'avoir une vitesse constante dans tout le réseau.

4) Déterminer la hauteur manométrique du ventilateur à installer (ΔP en Pa) pour assurer l'écoulement dans toutes les branches du réseau après équilibrage (les pertes de charge sont alors les mêmes dans les tronçons **A** et **B**).

5) En supposant un ventilateur de rendement global $\eta_g=0.5$, calculer la puissance électrique absorbée.

La deuxième méthode proposée est celle dite « du regain de pression statique »
L'objectif de cette méthode est d'obtenir une pression statique quasi-constante à chaque nœud du réseau (les nœuds d'un réseau sont les points où apparaissent des dérivation ou de jonctions). Ceci est effectué en adaptant les diamètres des tronçons qui relient les différents nœuds.

6) on souhaite qu'aucun point du tronçon **B** (qui est le tronçon le plus résistif : plus de coude, plus long) ne soit en dépression (par rapport à P_{atm}). Les pertes de charge le long du conduit font baisser la pression. Celle-ci sera donc minimum en **B'**. En imposant la condition précédente et en écrivant la relation de Bernoulli entre **B'** et **B**, calculer la vitesse U_B dans le tronçon **B**. En déduire le diamètre D_B du conduit **B**.

7) En appliquant la relation de Bernoulli généralisée entre le point **R** situé juste à l'amont de la dérivation et le point **B'** situé juste à l'amont de la bouche **B** (dans la conduite) montre

que l'on peut écrire la relation suivante :
$$\left(1 - \xi_B\right) \frac{U_R^2}{U_B^2} = 1 + 2\xi_{coude} + \lambda L \sqrt{\frac{\pi U_B}{4Q_B}}$$

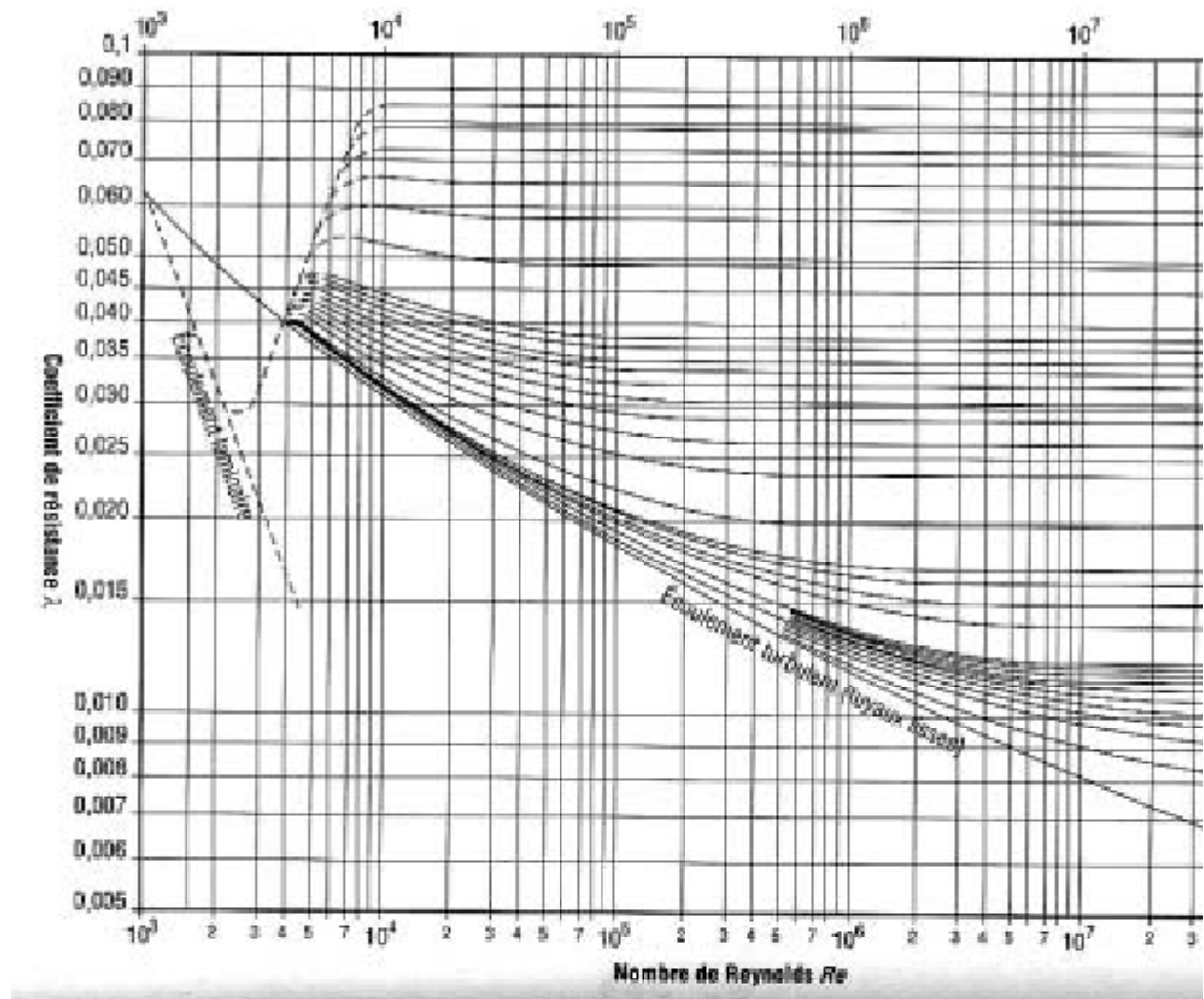
reliant les pertes de charges aux vitesses U_R et U_B sachant que l'on souhaite réaliser $P_R = P_{B'}$. Calculer la valeur de la vitesse U_R du tronçon racine. En déduire le diamètre D_R du conduit racine.

8) recalculer les pertes de charges dans les tronçons **R** et **B**. Vous rassemblerez les résultats dans le *tableau 2* de la feuille réponse.

9) Le tronçon **B** étant le plus résistif, le concepteur, pour équilibrer le réseau, prévoit une bouche d'aération entre **A'** et **A** qui permettra d'obtenir une perte de charge pour la branche **A** identique à la perte de charge pour la branche **B** ($\Delta P_{tot,A} = \Delta P_{tot,B}$). Dans ces conditions déterminer la hauteur manométrique du ventilateur à installer (en Pa),

10) En supposant un ventilateur de rendement global $\eta_g=0.5$, calculer la puissance électrique absorbée.

Document réponse



II.2 méthode de la vitesse constante : *tableau 1*

Branch	D (m)	L (m)	ε_r	V (m/s)	Re $\cdot 10^{-5}$	λ	ξ_{coud} e	ξ_{deriv}	ΔP_l (Pa)	ΔP_{deriv} (Pa)	ΔP_{bouche} (Pa)
A			0,00028	10			0,22	0,56			
B			0,00028	10			0,44	0,18			
Racine			0,00019	10			/	/		/	/

II.8 méthode du regain de pression statique : *tableau 2*

Branch	D (m)	L (m)	ε_r	V (m/s)	Re	λ	ξ_{coud} e	ξ_{deriv}	ΔP_l	ΔP_{deriv}	ΔP_{bouche}

■ Réponse problème n° 1, Année 2003/2005, Université Joseph Fourier, Grenoble

2)

$$Hs(h) = h + U^2/2.g = h + Q^2/(2gL^2h^2)$$

$$dHs/dh = 1 - Q^2/(gL^2h^3) \rightarrow h_c = (Q^2/(gL^2))^{1/3}$$

$$\text{Et } Hs(h_c) = 3h_c/2$$

3)

$$Hs(b) = h_m + Q^2/(2gb^2h_m^2) = Hs(L_c) = 3h_c/2$$

$$Q^2 = 2gb^2h_m^2 \cdot (3h_c/2 - h_m)$$

4)

$$Q^2 = 2gb^2h_m^2 \cdot (3\alpha h_m/2 - h_m) = 2gb^2h_m^3 \cdot (3\alpha/2 - 1)$$

$$Q > 0 \rightarrow 2/3 < \alpha$$

$$h_m : \text{hauteur fluviale} \rightarrow h_m > h_c \rightarrow \alpha < 1.$$

5)

évident d'après la question précédente

6)

$$\rho \cdot U_m^2 \cdot h_m \cdot L - \rho \cdot U_v'^2 \cdot h_v' \cdot L = 0,5 \cdot \rho \cdot g \cdot h_v' \cdot h_v' \cdot L - 0,5 \cdot \rho \cdot g \cdot h_m \cdot h_m \cdot L$$

$$\text{soit après simplification : } h_m h_v' \cdot (h_m + h_v') = 2 \cdot Q^2/(g \cdot L^2) = 2 \cdot h_c^3$$

7)

$$\Delta H_{1 \rightarrow 2} = H_2 - H_1 = h_2 + Q^2/(2gL^2h_2^2) - h_1 + Q^2/(2gL^2h_1^2)$$

$$\Delta H_{1 \rightarrow 2} = -(h_2 - h_1)^3/(4 \cdot h_2 \cdot h_1)$$

■ Réponse problème n° 2, Année 2003/2005, Université Joseph Fourier, Grenoble

1)

$$Q = U \cdot S = U \cdot \pi \cdot D^2/4 \rightarrow D = (4Q/(U\pi))^{1/2}$$

2)

$$\Delta p_{\text{reg}} = \lambda \cdot L/D \cdot \rho U^2/2 ; \Delta p_{\text{sing}} = \xi_{\text{sing}} \cdot \rho U^2/2$$

3)

NON

Augmenter la perte de charge dans la branche la moins chargée (choisir un bouche qui permette ce réglage).

4)

$$\Delta P = \Delta P_B + \Delta P_R$$

5)

$$P = Q.\Delta P = Q.(\Delta P_B + \Delta P_R)/\eta_g; P = 528 \text{ W}$$

6)

$$\rho U_B^2/2 + P_B = P_{atm} + 0 + \Delta P_{bouche} . \text{ On souhaite (c'est la méthode) } P_B = 0.$$

$$\Rightarrow U_B = 7,07 \text{ ms}^{-1}$$

7)

$$\rho U_R^2/2 + P_R = P_B + \rho U_B^2/2 + \Delta P_B; \text{ avec } P_B = 0; \Rightarrow U_R = 12 \text{ ms}^{-1}$$

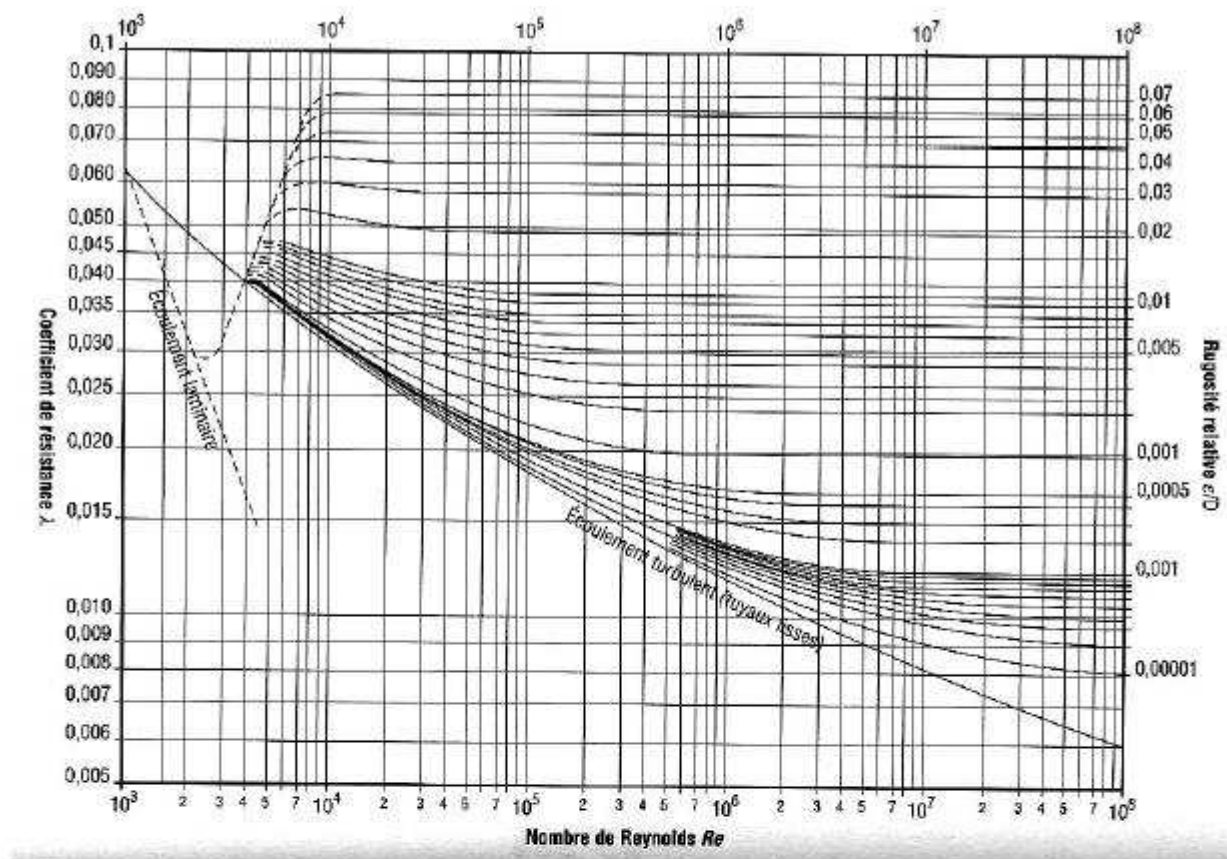
8)

9)

$$\Delta P = \Delta P_B + \Delta P_R$$

10)

$$P = Q.\Delta P = Q.(\Delta P_B + \Delta P_R)/\eta_g; P = 263 \text{ W}$$



II.2 méthode de la vitesse constante : *tableau 1*

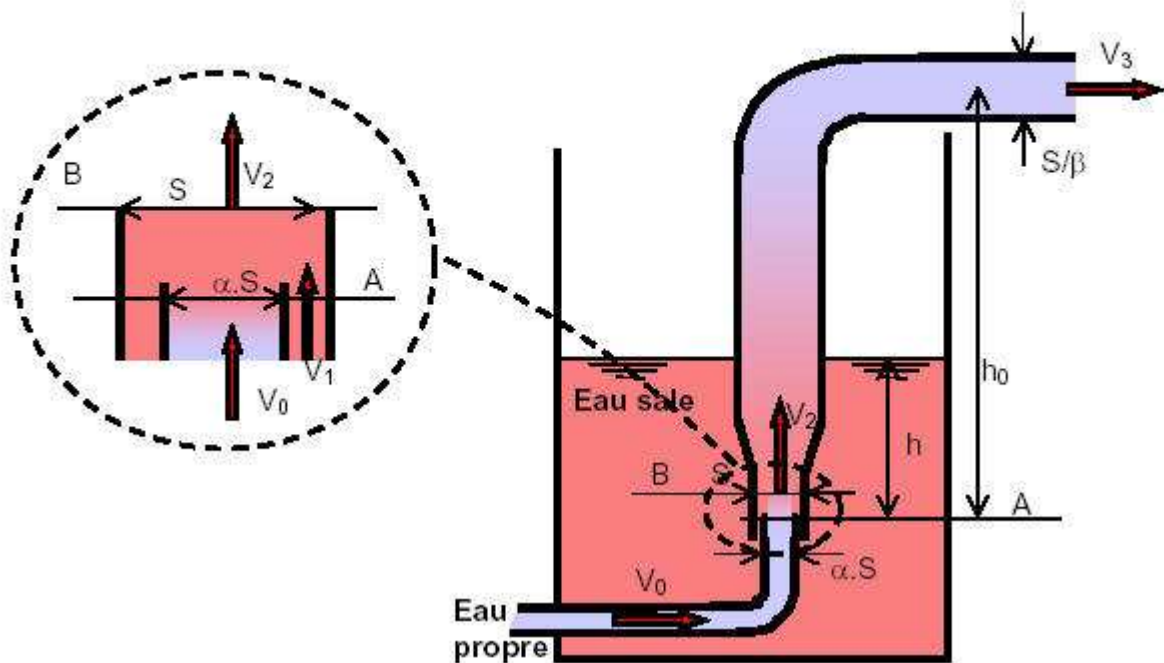
Branche	D (m)	L (m)	ε_r	V (m/s)	Re $\cdot 10^{-5}$	λ	$\xi_{\text{coud. e}}$	ξ_{deriv}	ΔP_i (Pa)	ΔP_{deriv} (Pa)	ΔP_{bouche} (Pa)	$\Delta P_{\text{coudé}}$ (Pa)	ΔP_{tot} (Pa)
A	0,32	8	0,00028	10	2,56	0,018	0,22	0,56	27	34	30	13,2	104
B	0,32	21	0,00028	10	2,56	0,018	0,44	0,18	71	10	30	2*13,2	137,
Racine	0,46	10	0,00019	10	3,68	0,016	/	/	21	/	/	/	21

II.8 méthode du regain de pression statique : *tableau 2*

Branche	D (m)	L (m)	ε_r	V (m/s)	Re	λ	$\xi_{\text{coud. e}}$	ξ_{deriv}	ΔP_i	ΔP_{deriv}	ΔP_{bouche}	$\Delta P_{\text{coudé}}$	ΔP_{tot}
B	0,39	21	0,00028	7,07	2,2	0,017	0,44	0,18	27,4	5,4	30	2*6,6	46
Racine	0,42	10	0,00019	12	4	0,016	/	/	33	/	/	/	33

■ Problème n° 1, Année 2004/2005, Université Joseph Fourier, Grenoble

Pompage par entraînement.



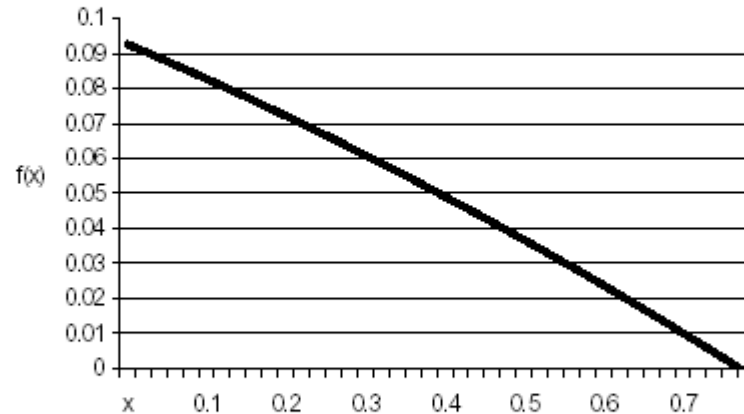
Ce procédé est employé pour vidanger de l'eau sale qu'on ne veut pas faire passer dans une pompe. Dans une chambre de section S , de l'eau propre est injectée à grande vitesse V par une conduite de section $\alpha.S$. L'eau sale est entraînée, et entre dans la chambre à la vitesse V_1 . Le mélange sort de la chambre à la vitesse V_2 . Puis la conduite s'élargit progressivement (pas de perte de charge) jusqu'à la section S/β et le mélange est rejeté à l'atmosphère à la vitesse V_3 . On note ρ la masse volumique de l'eau (propre ou sale).

- 1) Au moyen de la conservation des débits, exprimer V_2 en fonction de V_0 , V_1 et α .
- 2) Au moyen du théorème de Bernoulli pour l'écoulement de l'eau sale entre la surface libre et la section **A**, exprimer p_{gA}
- 3) Compte tenu de la discontinuité de vitesse dans la section **A** de la chambre, il faut employer le théorème de la quantité de mouvement pour le volume fluide compris entre les sections **A** et **B** de la chambre. Etablir la relation entre la différence des pressions motrice ($p_{gA} - p_{gB}$), α et les vitesses V_0 , V_1 , V_2 .

4) Au moyen du théorème de Bernoulli pour l'écoulement du mélange entre la section **B** et la sortie à l'atmosphère, exprimer p_{gB} .

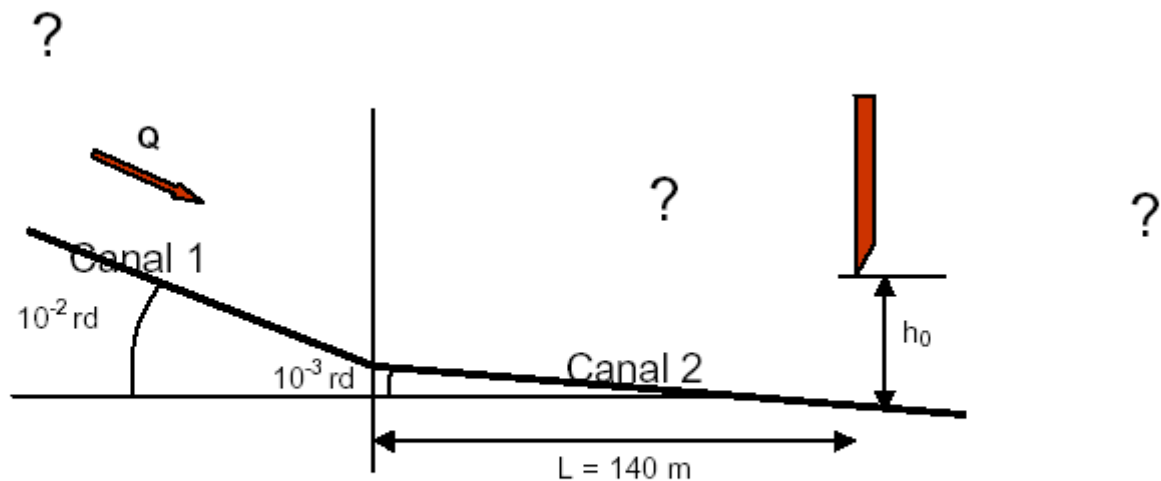
5) En reportant les résultats des questions 1), 2), 4) dans celui de la question 3) et en posant $V_1 = x V_0$, établir la relation suivante:

$$(1/2 - \alpha).x^2 - (1 + \beta^2)/2 \cdot [(1 - \alpha).x + \alpha]^2 + \alpha = g.(h_0 - h)/V_0^2$$



6) La fonction $f(x)$ au premier membre de cette relation est donnée par le graphique ci dessus, pour $\alpha = 0,1$ et $\beta = 0,25$. La vitesse d'injection est $V_0 = 20 \text{ m/s}$. On prend $g = 10 \text{ m/s}^2$, La hauteur de refoulement est $h_0 = 3 \text{ m}$. Le niveau d'eau sale peut varier entre $h = 0$ et $h = 2,5 \text{ m}$. Pour ces deux niveaux, calculer V_1 et le rapport du débit d'eau sale évacué au débit d'eau propre injecté.

Influence d'une vanne de fond



Dans une station hydroélectrique, un débit de $Q = 6 \text{ m}^3/\text{s}$ transite dans un très long canal rectangulaire (canal 1) de largeur $B = 4 \text{ m}$, dont la pente de fond passe brusquement de 10^{-2} rd à 10^{-3} rd . Le coefficient de Strickler pour tout le canal est $K_s = 83 \text{ USI}$. Dans le canal 2 après une distance $L = 140 \text{ m}$ l'écoulement rencontre un dispositif de contrôle, soit une vanne de fond. Le coefficient de débit de la vanne est $K_v = 0,55$.

1) calculer la hauteur critique de cet écoulement.

2) Calculer les hauteurs normales h_{n1} et h_{n2} de cet écoulement dans les différentes parties du canal. Pour une hauteur $h_0 = 1,20$ m la vanne influence t'elle l'écoulement.

Dans la suite la vanne est positionnée tel que $h_0 = 0,5$ m.

3) Qualifier l'écoulement (fluvial, torrentiel, faible pente, forte pente, ...) dans les différentes parties du canal en amont et en aval. Vous préciserez où il peut y avoir l'apparition de ressaut hydraulique.

On étudie d'abord l'écoulement à l'aval de la vanne. On souhaite savoir si la vanne est noyée ou si elle est dénoyée. Pour les cas où $h_0 < h_c < h_n$, le régime aval sera à priori torrentiel passant par un ressaut pour revenir au régime permanent ($h = h_n$).

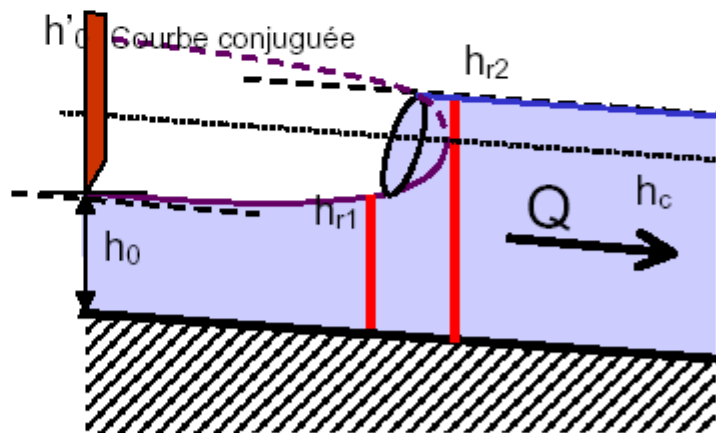
4) Dans l'hypothèse d'un ressaut, appliquer la conservation de la quantité de mouvement entre une section avant le ressaut et une section après le ressaut pour obtenir l'équation reliant h_{r1} , h_{r2} et h_c .

5) h_{r1} est appelé conjugué de h_{r2} et vice versa (l'expression reliant h_{r1} et h_{r2} étant parfaitement symétrique).

Si l'écoulement retrouve h_{n2} après le ressaut la hauteur h_{r1} sera donc le conjugué de h_{n2} . Le ressaut sera donc situé à l'intersection de la courbe conjuguée et de $h = h_{n2}$. Si cette intersection existe le ressaut existe et la vanne sera dénoyée. Si cette intersection n'existe pas il n'y aura pas de ressaut et la vanne sera noyée. La hauteur d'eau à l'aval de la vanne sera alors h_{n2} .

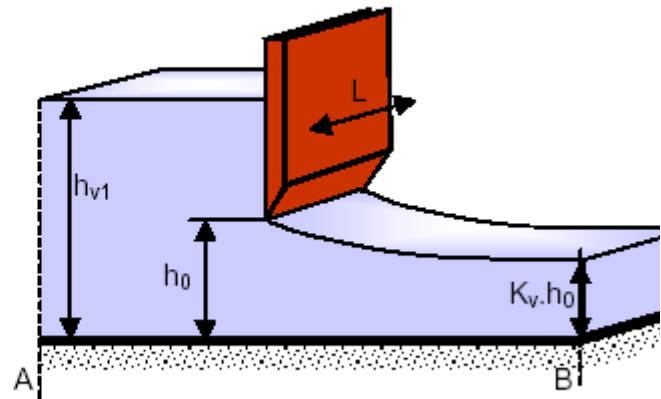
La condition d'existence de l'intersection dépend de la position relative de h_{n2} et du conjugué h'_0 de h_0 .

Préciser cette condition et conclure sur l'existence du ressaut. Faire un schéma.



Coefficient de débit d'une vanne

1) Si on regarde précisément l'écoulement à l'aval d'une vanne dénoyée on remarque que la section se contracte en passant de h_0 à $K_v \cdot h_0$. K_v est le coefficient de débit de la vanne. En appliquant la relation de Bernoulli entre les section A et B (figure ci-contre) et la conservation du débit, donner une relation entre Q , K_v , h_0 et h_{v1} .



2) Cette relation reste valable pour une vanne noyée car le coefficient de débit K_v dépend essentiellement de la géométrie de la vanne. Calculer h_{v1} pour les conditions d'écoulement obtenues à la question (I-6).

■ Problème n° 4, Année 2004/2005, Université Joseph Fourier, Grenoble

Ligne d'eau à l'amont de la vanne

1) Rappeler (sans la démontrer) l'équation qui donne les variations de la hauteur d'eau dh/dx . Etudier les variations de cette fonction pour le canal 1 et pour le canal 2.

2) Pour les conditions de la question (I-6) et (II-2) dessiner l'allure des lignes d'eau à l'aval changement de pente. Le calcul de cette ligne d'eau donne une hauteur d'eau au droit de la cassure de 2,20 m. Dessiner alors la ligne d'eau à l'amont du changement de pente. Vous préciserez la position du ressaut par rapport à la cassure de pente.

3) en reprenant l'équation obtenue à la question (I-4). calculer la hauteur d'eau après le ressaut hydraulique sachant qu'avant le ressaut la hauteur d'eau est h_{n1} .

4) Calculer la perte de charge au passage de ce ressaut.

5) regrouper les résultats des parties I, II et III sur une courbe $H_s(h)$.

■ Réponse problème n° 1, Année 2004/2005, Université Joseph Fourier, Grenoble

1)

La conservation du débit donne :

$$V_2 = \alpha V_0 + (1-\alpha)V_1$$

2)

$$P_{gA} = P_{atm} + \rho g h - .5 * \rho V_1^2$$

3)

L' application de la conservation de la quantité de mvt au domaine ci-contre perme d'écrire :

$$\rho \alpha V_0 S. (V_2 - V_0) + \rho V_1 S. (1-\alpha)(V_2 - V_1) = S(P_{gA} - P_{gB})$$

$$(P_{gA} - P_{gB}) = -\rho \alpha V_0^2 - \rho V_1^2. (1-\alpha) + \rho V_2^2$$

4)

$$P_{gB} = P_{atm} + \rho g h_0 + .5 * \rho V_2^2 (\beta^2 - 1)$$

5)

Avec un peu de rigueur cela doit marcher

6)

A.N. :

Pour $h=0m$: $x=0.19 \rightarrow V_1 = 3.8 \text{ ms}^{-1}$

Pour $h=2.5m$: $x=0.7 \rightarrow V_1 = 14 \text{ ms}^{-1}$

$$r = V_1(1-\alpha) / V_0 \alpha$$

Pour $h=0m$: $r=1.71$

Pour $h=2.5m$: $r=6.3$

■ Réponse problème n° 2, Année 2004/2005, Université Joseph Fourier, Grenoble

1)

$$hc_1 = hc_2 = (Q^2 / g B^2)^{1/3} = 0,62 \text{ m}$$

2)

$$hn_1 = (Q / (B.K_s.i^{1/2}))^{3/5} = 0,36 \text{ m}$$

\rightarrow écoulement torrentiel ; canal à forte pente

$$hn_2 = 0,72 \text{ m}$$

\rightarrow écoulement fluvial; canal à faible pente

3)

Apparition de ressaut à l'aval de la vanne car celle ci impose $h = 0,5 < h_c$
L'écoulement retrouvera le régime fluvial avec un ressaut hydraulique.

Apparition d'un ressaut à l'amont du changement de pente. En effet lors d'un changement de pente l'écoulement doit passer d'un régime torrentiel à un régime fluvial. Il ne peut le faire que par le passage d'un ressaut situé à l'amont du changement de pente.

4)

$$\rho \cdot Q \cdot Q / S_2 - \rho \cdot Q \cdot Q / S_1 = \rho \cdot g \cdot h_1 \cdot S_1 / 2 - \rho \cdot g \cdot h_2 \cdot S_2 / 2$$

pour une section rectangulaire $S = L \cdot h$

$$Q^2 / g \cdot L^2 (h_2^{-1} - h_1^{-1}) = 0,5 \cdot (h_1 - h_2)$$

Après calcul, en notant que $h_c^3 = Q^2 / g \cdot L^2$:

$$2 \cdot h_c^3 = h_1 \cdot h_2 \cdot (h_1 + h_2)$$

5)

$h'_0 = 0,76 \text{ m} > h_{n2} \rightarrow$ la vanne est dénoyée

■ Réponse problème n° 3, Année 2004/2005, Université Joseph Fourier, Grenoble

1)

$$P_{atm} + \rho g h_{v1} + 0,5 \cdot \rho (Q / B h_{v1})^2 = P_{atm} + \rho g K_v h_0 + 0,5 \cdot \rho (Q / B K_v h_0)^2$$

$$h_{v1} \approx K_v h_0 + 0,5 / g (Q / B K_v h_0)^2 ; \text{ en négligeant le terme en } U_1^2$$

$$Q = K_v \cdot S_0 \cdot (2g \cdot (h_{v1} - K_v h_0))^{1/2}$$

2)

$$h_{v1} = h_{n2} + 0,5 / g (Q / B K_v h_0)^2$$

$$h_{v1} = 2,23 \text{ m}$$

■ Réponse problème n° 4, Année 2004/2005, Université Joseph Fourier, Grenoble

1)

$$dh/dx = (i - J) / (1 - Fr^2).$$

Pour le canal 1 :

h	0		h_n		h_c		∞
i - j		-	0	+		+	i
$1 - F^2$		-		-	0	+	1
dh/dx		+	0	-	∞	+	i

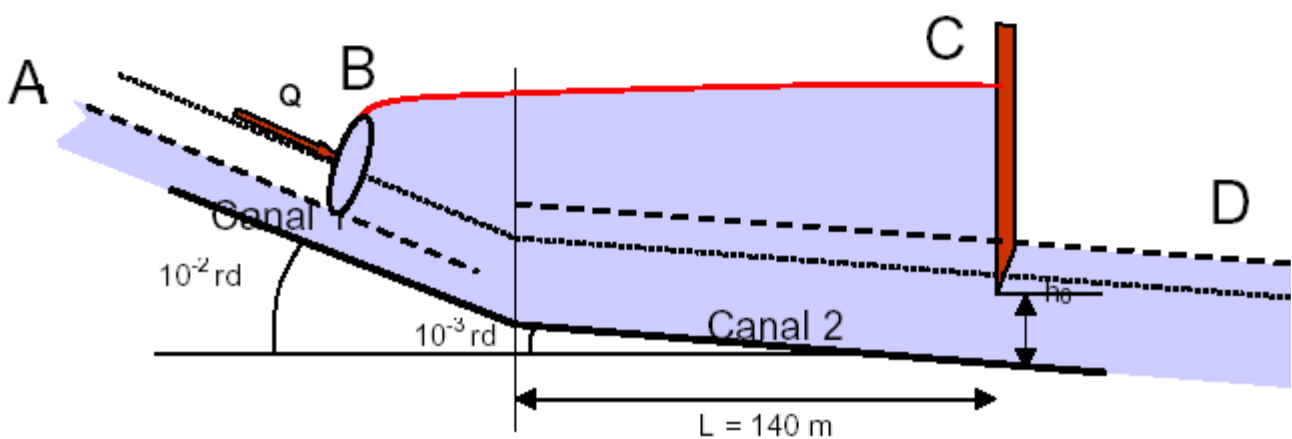
On aura donc pour le canal 1 après le ressaut une courbe de type S1

Pour le canal 2

h	0		h_c		h_n		∞
i - j		-		-	0	+	i
$1 - F^2$		-	0	+		+	1
dh/dx		+	∞	-	0	+	i

La S1 du canal 1 se poursuivra avec une ligne d'eau de type M1

2)



3)

$$2.h_c^3 = h_1.h_2.(h_1+h_2)$$

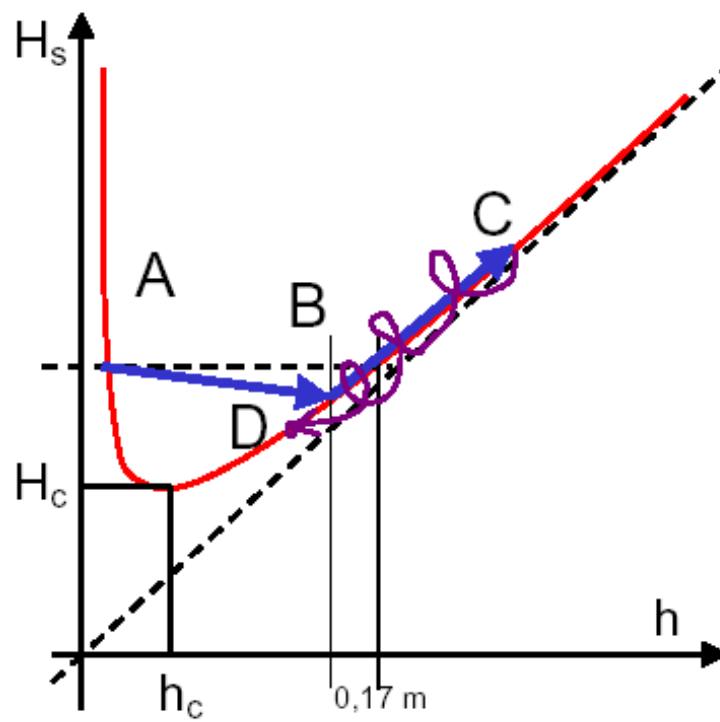
$$\rightarrow h = 0,99 \text{ m}$$

4)

$$\Delta H = (h_2 - h_1)^3 / (4.h_1.h_2)$$

$$\Delta H = 0,17 \text{ m}$$

5)



- Exercice n° 1, partie A, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielle de Paris, 6 Février 2002

Étalement par centrifugation

La technique d'étalement par centrifugation (spin coating) est couramment utilisée pour des couches minces de liquide sur un substrat solide plan. La couche de liquide visqueux d'épaisseur h qui dépend de la position radiale r et du temps (fig. 1). On suppose que la couche de liquide conserve cette symétrie cylindrique au cours de l'étalement. Le substrat solide tourne à une vitesse angulaire ω .

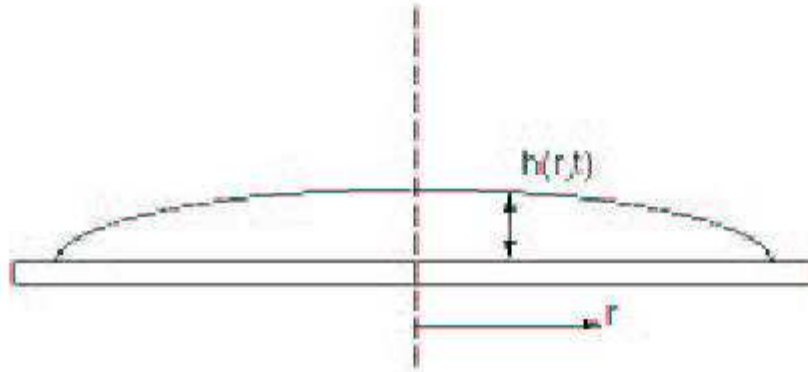


FIG. 1 – Schéma de l'étalement par centrifugation

La vitesse ω est de l'ordre de 1000 tours/min et l'épaisseur de la couche liquide varie de $100\text{ }\mu\text{m}$ à $1\text{ }\mu\text{m}$. Le rayon du disque tournant est 5 cm.

1. Rappeler les hypothèses de l'approximation de lubrification.
2. Montrer que la composante radiale de vitesse u obéit à l'équation :

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \rho \omega^2 r$$

où ρ est la masse volumique du liquide et η sa viscosité dynamique.

3. Quelles sont les conditions aux limites pour la vitesse u ?
4. Montrer que le débit, intégré sur l'épaisseur h , est :

$$q(r) = \frac{\omega^2 r}{\nu} \frac{h^3}{3}$$

5. Montrer que la conservation de la masse conduit à :

$$r \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\omega^2 r^2}{\nu} \frac{h^3}{3} \right) = 0$$

6. L'expérience montre que, très rapidement après le début de l'étalement, l'épaisseur de la couche de liquide est pratiquement indépendante de r . Quelle est alors la loi d'évolution de h en fonction du temps ? Quel temps faut-il pour amincir de 100 à $1\text{ }\mu\text{m}$ une couche de liquide dont la viscosité cinématique est $0.5\text{ cm}^2/\text{s}$, à une vitesse de rotation de 1000 tours/min ?

- Exercice n° 2, partie A, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielle de Paris, 6 Février 2002

Implosion d'une bulle

Les bulles de gaz formées dans un liquide, par exemple par le phénomène de cavitation, implosent très rapidement et provoquer de très fortes surpressions locales. Nous cherchons à estimer cette surpression.

1. Pour une bulle de gaz dans l'eau, de quelques mm de diamètre, les temps d'implosion sont de l'ordre de la ms. Estimer l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds associé à l'écoulement dans l'eau.
2. Afin d'estimer la surpression engendrée par l'implosion des bulles de gaz, il faut décrire l'écoulement radial de fluide associé aux variations du rayon R d'une bulle. Quel est le potentiel satisfaisant la symétrie sphérique (avec un champ de vitesse purement radial accompagnant les variations de rayon de la bulle)? On rappelle que l'expression du Laplacien en coordonnées sphériques r, θ, φ est:

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

3. Déterminer le champ de pression associé à cet écoulement instationnaire et montrer que le rayon de la bulle obéit à l'équation suivante:

$$\frac{p_b - p_0}{\rho} = \frac{3}{2} \dot{R}^2 + R \ddot{R}$$

où p_b est la pression à la surface de la bulle et p_0 la pression loin de la bulle.

4. En intégrant une fois la relation donnée ci-dessus, exprimer la relation entre p_0 et le rayon maximal de la bulle R_m (rayon atteint lorsque $p_b \ll p_0$).
5. Lorsque la bulle implose et que son rayon devient très petit devant R_m , montrer que la vitesse du liquide varie comme $R^{1/2}$.
6. Montrer que la surpression maximale au voisinage de la bulle qui implose varie comme $(p_0 - p_v)(R_m/R)^3$ où p_v est la pression de vapeur saturante. Estimer cette surpression si la pression ambiante est égale à une atmosphère et que la bulle a implosé jusqu'à un rayon de son rayon maximal et en supposant que la pression de vapeur saturante est très petite devant la pression atmosphérique.

■ Exercice n° 3, partie A, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielle de Paris, 6 Février 2002

Solution de polymère dans un Couette cylindrique

On étudie l'écoulement d'une solution de polymère dans un écoulement de Couette, c'est-à-dire entre deux cylindres coaxiaux. Les caractéristiques rhéologiques de cette solution sont données dans la fig. 2.

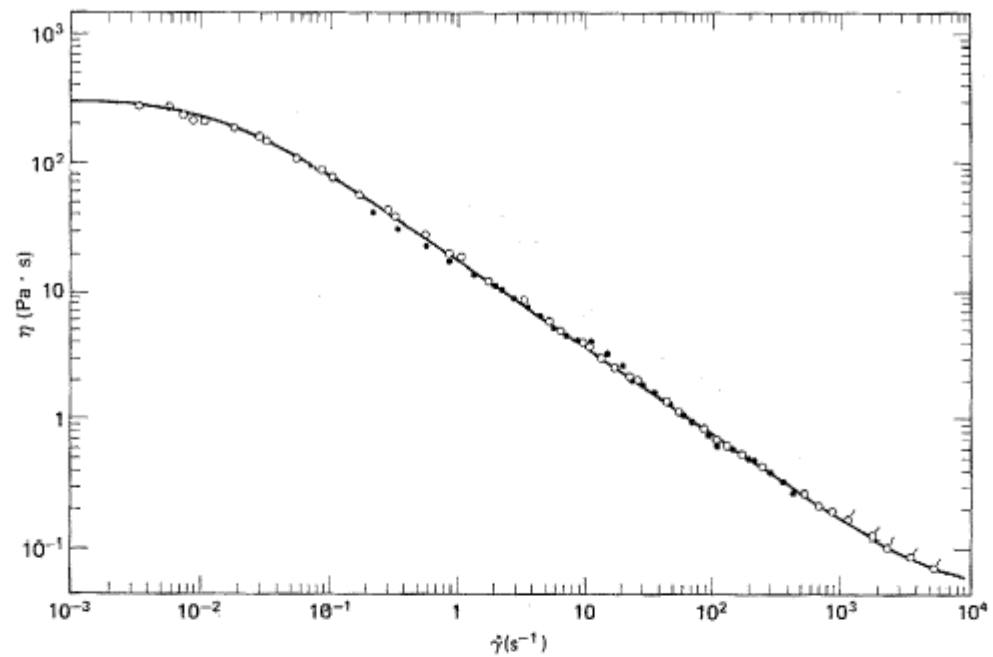


FIG. 2 – Viscosité de cisaillement en fonction du gradient de vitesse pour une solution de polymère.

1. Comment peut-on qualifier le comportement rhéologique de cette solution de polymère ? Plus précisément, quelle loi permet de représenter la viscosité en fonction du gradient de vitesse, dans la gamme de gradient de vitesse comprise entre 10^{-1}s^{-1} et 10^3s^{-1} ?
2. On suppose que l'écoulement est stationnaire. Montrer, en écrivant l'équilibre d'un petit élément de volume, que la loi fondamentale de la dynamique se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_{r\theta}) = 0$$

3. En coordonnées cylindriques, les différentes composantes du tenseur des vitesses de déformation (partie symétrique du gradient de vitesse) s'écrivent :

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}$$

$$e_{r\theta} = \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{2r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}$$

Montrer que, dans la situation présente, le tenseur des vitesses de déformation se réduit à :

$$e_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)$$

Expliquer qualitativement la raison de la présence du second terme entre parenthèses.

4. A partir des données de viscosité pour la solution de polymère et en cherchant une loi de vitesse de la forme : $u_\theta = \sum_m A_m r^m$, déterminer l'équation à laquelle doivent satisfaire les exposants m .
5. Quelles seraient les conditions aux limites permettant de déterminer complètement la solution ?

- Partie B, Préambule, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielle de Paris, 6 Février 2002

Partie B

De la vidange sous toutes ses formes

1. Préambule

Dans ce problème, on étudie la dynamique de vidange de tubes remplis de liquide sous l'effet de la gravité. Selon les conditions expérimentales, les régimes de vidange peuvent être différents. Pour essayer de classer les différentes situations et ne retenir que les phénomènes pertinents, il est essentiel de définir les nombres sans dimension caractérisant le problème.

Montrer, par un raisonnement purement dimensionnel, que les nombres sans dimension qui interviennent dans ce problème sont :

- le nombre de Reynolds $Re = UR/\nu$
- le nombre capillaire $Ca = \eta U/\gamma$
- le nombre de Bond $Bo = \rho g R^2/\gamma$

et leurs différentes combinaisons (U étant la vitesse caractéristique de vidange, R le rayon du tube, ρ la masse volumique du liquide, η sa viscosité dynamique, ν sa viscosité cinématique, γ sa tension superficielle).

- Partie B, Question 2, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielle de Paris, 6 Février 2002

2. Vidange de tubes ouverts à leur extrémité supérieure

D'après C. Clanet, From Galileo to Torricelli, Phys. Fluids 2000

On analyse la vidange rapide de cylindres verticaux remplis de liquide. Les cylindres sont ouverts à leur extrémité supérieure et à leur extrémité inférieure par un orifice circulaire de diamètre d . Le diamètre D_0 des cylindres est compris entre 8 et 17 cm, leur longueur varie de 10 à 20 cm. L'orifice inférieur peut être ouvert très rapidement pour laisser le liquide s'écouler. À l'aide d'une caméra rapide, on peut enregistrer la position de l'interface supérieure du liquide en fonction du temps (fig. 3). Le liquide contenu dans le tube est soit de l'eau, soit de l'éthanol. Les propriétés physiques des liquides sont données dans le tableau ci-dessous.

	$\rho(\text{kg/m}^3)$	$\nu(\text{m}^2/\text{s})$	$\gamma(\text{mN/m})$
Eau	1000	$1 \cdot 10^{-6}$	73
Ethanol	810	$1.5 \cdot 10^{-6}$	25

1. Estimer le nombre de Reynolds associé à l'écoulement.
2. Montrer que dans le cas d'un tube entièrement ouvert à son extrémité inférieure (l'orifice inférieur est ouvert), la vitesse de l'interface supérieure est, en valeur absolue :

$$v(z_i) = (2g|z_0 - z_i|)^{1/2}$$

où z_0 est la position initiale de l'interface supérieure du liquide et z_i est la position de l'interface au cours du temps.

3. Montrer que, lorsque le tube est fermé à sa partie inférieure par un orifice de diamètre d ($d \ll D_0$), la vitesse de l'interface supérieure est, en valeur absolue :

$$v(z_i) = \left(\frac{d}{D_0}\right)^2 \sqrt{2gz_i}$$

4. Calculer le temps de vidange T_V pour les deux situations.
5. En fonction du temps, quelle est l'évolution de la vitesse dans les deux régimes ? La vitesse augmente-t-elle ou diminue-t-elle ? Comparer cette évolution théorique à celle observée dans les expériences.

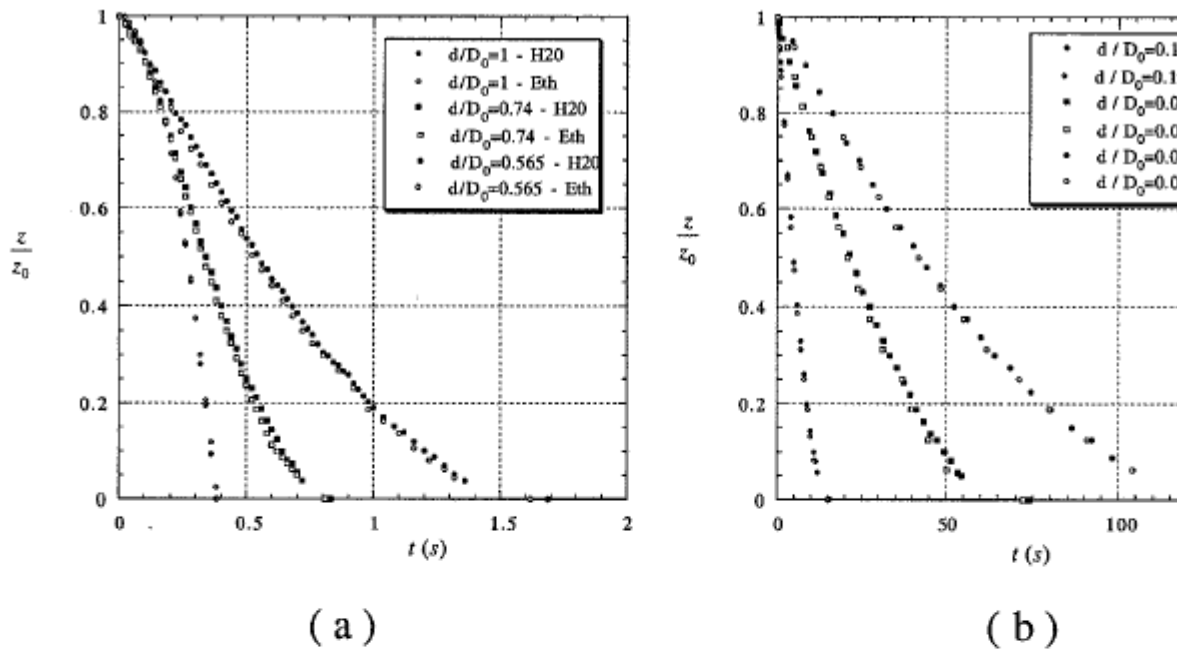


FIG. 3 – Position de l'interface supérieure en fonction du temps. La position verticale est normalisée par la position initiale z_0 . Les différentes courbes correspondent à différents rapports d/D_0 . Les symboles fermés sont les expériences faites avec de l'eau. Les symboles ouverts sont les expériences faites avec de l'éthanol. Le diagramme de gauche montre les valeurs élevées de d/D_0 (> 0.192) et le diagramme de droite les petites valeurs de d/D_0 (< 0.192). Le diamètre du tube est δ .

6. On admettra que le champ de vitesse $v(z)$, entre la surface libre supérieure et le fond, est de la forme :

$$\frac{v(z) - v(z_i)}{v(0) - v(z_i)} = \left(\frac{z_i - z}{z_i} \right)^n$$

où z_i est la position courante de l'interface supérieure.

Montrer que l'équation d'Euler conduit à :

$$\int_{z=0}^{z=z_i} \frac{\partial v}{\partial t} dz + \left[\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right]_{z=0}^{z=z_i} = 0$$

3. Vidange de tubes fermés à leur extrémité supérieure

3.1 Tubes de grand diamètre

On examine la vitesse de vidange de tubes cylindriques remplis de liquide et fermés à leur extrémité supérieure. Commençons par des tubes de diamètre assez grand (quelques cm), longueur de quelques m. Lorsqu'on ouvre l'extrémité inférieure du tube, une bulle d'air monte dans le tube. La vitesse d'ascension U de l'extrémité supérieure de cette bulle est donnée dans le tableau ci-dessous, en fonction du diamètre du tube. Les données sont é représentées sur la fig.4.

Diamètre (cm)	1.23	2.16	5.14	7.94
U (cm/s)	10	14.8	24.6	30

Les données ci-dessus ont été obtenues avec un tube rempli d'eau. Si on refait l'expérience avec un tube rempli d'un mélange eau glycérol à 50%, dont la masse volumique est 1100 kg/m^3 et la viscosité dynamique 1 Pa.s , on trouve des vitesses d'ascension extrêmement voisines.

1. Comment varie la vitesse d'ascension en fonction du diamètre du tube?

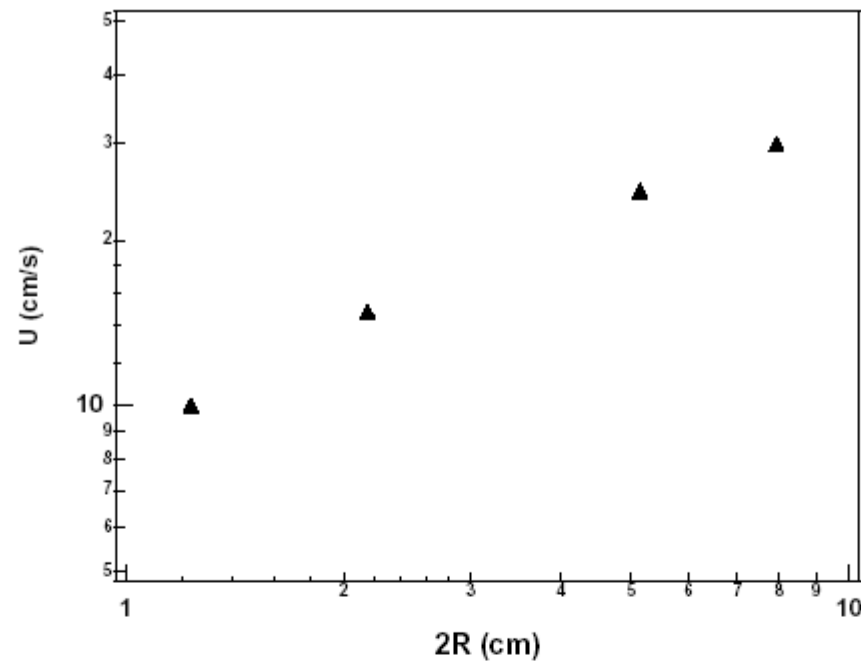


FIG. 4 – Vitesse d'ascension d'une bulle d'air dans un tube rempli d'eau, en fonction du diamètre du tube

2. Quel est la valeur du nombre de Reynolds associé à l'écoulement ?
3. D'après la valeur du nombre de Reynolds et les données expérimentales, quels sont les paramètres physiques qui déterminent la vitesse d'ascension de la bulle ?
4. Afin d'analyser l'écoulement autour de la partie supérieure de la bulle, on se place dans un référentiel qui se déplace à la vitesse U de la bulle. Montrer que, dans ce référentiel, l'écoulement du liquide à l'interface air-liquide obéit à l'équation :

$$q(x)^2 = 2gx$$

où x est la distance entre le sommet de la bulle et le point considéré et q est le module du vecteur vitesse le long de l'interface. Pourquoi faut-il se placer dans le référentiel de la bulle pour obtenir ce résultat ?

5. On peut représenter approximativement l'écoulement autour du sommet de la bulle par un potentiel des vitesses de la forme :

$$\Phi = -Ux + A \exp(K_1 x/R) J_0(K_1 r/R)$$

où x est la distance depuis le sommet de la bulle, $J_0(r)$ est une fonction de Bessel de première espèce qui vérifie l'équation :

$$\frac{d^2 J_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dJ_0}{dr} = -J_0$$

Le paramètre K_1 est une racine de l'équation :

$$\frac{dJ_0(\zeta)}{d\zeta} = 0$$

Justifier la forme choisie pour ce potentiel des vitesses (Quelle équation doit satisfaire le potentiel des vitesses ? Quelle condition aux limites doit satisfaire le champ de vitesse ?)

6. L'application de la condition $a(x)^2 = 2ax$ au point $r = R/2$ de l'interface liquide/air

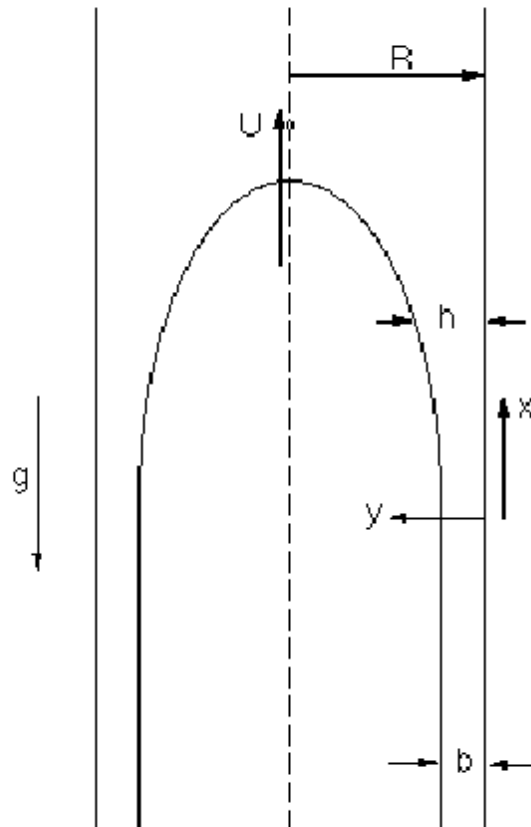


FIG. 5 – Schéma d'une longue bulle d'air remontant dans un tube rempli de liquide.

3.2 Tubes de petit diamètre

On considère maintenant la vidange de tubes plus petits (diamètre de l'ordre de quelques millimètres) remplis de liquides visqueux, toujours fermés à leur extrémité supérieure. Par rapport à des tubes de plus grands diamètres, une première constatation expérimentale est que, si le diamètre du tube est trop petit, le tube ne se vide pas. Pour une huile silicone ($\rho = 980 \text{ kg/m}^3$, $\gamma = 21 \text{ mN/m}$, $\eta = 10 \text{ Pa.s}$), le rayon minimal pour que le tube se vide est $r_c = 1,3 \text{ mm}$.

1. Parmi les nombres sans dimension mentionnés dans le préambule, quel est celui qui caractérise le rayon critique r_c ?
2. Suffisamment loin derrière l'avant de la bulle d'air qui remonte dans le tube à la vitesse U , le liquide s'écoule dans un mince film d'épaisseur b le long de la paroi du tube (figure 5). On suppose que l'épaisseur b est beaucoup plus petite que le rayon R du tube.

Montrer que le débit total de liquide s'écoulant dans ce film est :

$$Q = \frac{2\pi R \rho g b^3}{3\eta}$$

Montrer que la conservation du volume de liquide conduit à :

$$\frac{\rho g b^2}{3\eta U} \approx \frac{R}{2b}$$

3. On examine maintenant l'écoulement dans le film d'épaisseur variable h entre la bulle et la région où l'épaisseur du film devient constante et égale à b . On choisit pour coordonnée spatiale le long du tube et y la distance à la paroi solide.

Montrer que, dans le référentiel où la bulle est fixe, le débit de liquide est, par

Montrer que, dans la zone où l'épaisseur du film est constante, le débit, toujours référentiel où la bulle est fixe, est :

$$q = -\frac{b^3}{3\eta}\rho g - Ub$$

4. Montrer que l'épaisseur h du film de liquide est décrite par l'équation :

$$\frac{d^3h}{dx^3} - \frac{\rho g}{\gamma} = \frac{3\eta U}{\gamma h^3} \left(h - b - \frac{\rho g b^3}{3\eta U} \right)$$

Montrer que, si b/R est petit devant l'unité, l'équation d'évolution pour h se réduit

$$\frac{d^3h}{dx^3} = \frac{\rho g}{\gamma} \left(1 - \frac{b^3}{h^3} \right)$$

Montrer que l'échelle de longueur λ sur laquelle l'épaisseur h varie de manière appréciable est donnée par :

$$\lambda = b(\rho g b^2 / \gamma)^{-1/3}$$

- Réponse Exercice n° 1, partie A, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielle de Paris, 6 Février 2002

1. Les hypothèses de l'approximation de lubrification sont : écoulement à petit nombre de nolds, épaisseur de la couche de liquide petite devant ses dimensions latérales, variation de l'épaisseur de la couche de liquide.
2. Les approximations de lubrification conduisent à négliger les composantes de vitesse que la composante radiale. D'autre part, Re étant petit, on résoud l'équation de Stokes suppose que la variation d'épaisseur est assez lente pour traiter un problème quasi stationnaire. D'où :

$$\eta \Delta u = \nabla p + f$$

L'épaisseur de la couche de liquide étant très petite, on peut négliger les variations de pression hydrostatique provoquées par le gradient d'épaisseur. De ce fait, la seule force à prendre compte est la force centrifuge. Dans le laplacien de u , les dérivées par rapport à la coordonnée verticale z sont beaucoup plus grandes que les autres, d'où :

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \rho \omega^2 r$$

3. Les conditions aux limites sont : vitesse nulle sur la paroi solide ($z = 0$) et contrainte ($\partial u / \partial z = 0$) sur la surface libre ($z = h$).
4. Le champ de vitesse est obtenu par intégration de l'équation de mouvement, qui donne

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\omega^2 r}{\nu} (z - h)$$

en tenant compte de la condition sur la surface libre. Puis, en intégrant une seconde fois,

$$u = \frac{\omega^2 r}{\nu} \left(\frac{z^2}{2} - zh \right)$$

Le débit, intégré sur l'épaisseur h est donc :

$$q = \int_0^h u dz = \frac{\omega^2 r}{\nu} \frac{h^3}{3}$$

5. On écrit la conservation du volume de liquide dans un espace annulaire compris entre les rayons r et $r + dr$:

$$2\pi r dr \frac{\partial h}{\partial t} = q(r)2\pi r - q(r + dr)2\pi(r + dr)$$

soit :

$$r \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\omega^2 r^2}{\nu} \frac{h^3}{3} \right) = 0$$

6. Si h est indépendant de r , alors l'équation d'évolution pour h est :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{2\omega^2 h^3}{3\nu} = 0$$

soit :

$$\frac{\dot{h}}{h^3} = -\frac{2\omega^2}{3\nu}$$

qui s'intègre par rapport au temps en :

$$\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_0^2} = \frac{4\omega^2}{3\nu} (t - t_0)$$

Si l'épaisseur finale est beaucoup plus petite que l'épaisseur initiale h_0 , le temps d'étalement est :

$$t \approx \frac{3\nu}{4\omega^2 h^2}$$

Le calcul numérique donne un temps d'étalement de l'ordre de 1h.

- Réponse Exercice n° 2, partie A, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielle de Paris, 6 Février 2002

1. Si t est de l'ordre d'une ms, la vitesse est de l'ordre de $U = R/t$, soit 1 à 10 m/s. Le de Reynolds est : $Re = UR/\nu$. Son ordre de grandeur est au minimum 10^3 en pre rayon d'un mm et une viscosité cinématique de l'eau égale à $10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$
2. L'écoulement est purement radial. La seule composante de vitesse non nulle est u_r , reliée au potentiel des vitesses par $u_r = \partial\Phi/\partial r$. En supposant que l'écoulement da soit incompressible, le potentiel des vitesses obéit à l'équation de Laplace, soit :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 0$$

Soit : $\partial\Phi/\partial r = A/r^2$. La vitesse radiale varie donc en $1/r^2$. Sur l'interface bulle-liq vitesse est égale à \dot{R} . D'où :

$$u(r) = \frac{\dot{R}R^2}{r^2} \quad \Phi(r) = -\frac{\dot{R}R^2}{r}$$

3. Pour déterminer le champ de pression, écrivons la loi de Bernoulli en écoulement p instationnaire :

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho u^2 + p = p_0$$

la vitesse s'annulant à grande distance de la bulle et les effets de la gravité étant négl. En prenant les valeurs de Φ et de u à la surface de la bulle ($r = R$), on obtient :

$$-2\dot{R}^2 - R\ddot{R} + \frac{1}{2}\dot{R}^2 = \frac{p_0 - p}{\rho}$$

4. Pour intégrer l'équation différentielle sur R , il faut remarquer que :

$$\frac{d}{dt}(R^3 \dot{R}^2) = 2\dot{R}R^2 \left(\frac{3}{2}\dot{R}^2 + R\ddot{R} \right)$$

L'équation différentielle devient donc :

$$\frac{2}{3} \frac{d}{dt}(R^3) \frac{p - p_0}{\rho} = \frac{d}{dt}(R^3 \dot{R}^2)$$

On intègre cette équation entre le temps t où le rayon de la bulle est égal à R et le t où le rayon de la bulle est maximal et égal à R_m et sa vitesse d'expansion est nulle

$$\frac{2}{3}(R^3 - R_m^3) \frac{p - p_0}{\rho} = R^3 \dot{R}^2$$

5. Lorsque la pression dans la bulle est très petite devant p_0 , la vitesse de contrac donnée, en valeur absolue, par :

$$\dot{R} = \left(\frac{2p_0}{3\rho} \right)^{1/2} \left(\frac{R_m^3}{R^3} - 1 \right)^{1/2}$$

Soit, lorsque R est très petit devant R_m , $\dot{R} \propto (R_m/R)^{3/2}$ et la vitesse du fluide est

$$u(r) = \frac{\dot{R}R^2}{r^2} \propto \frac{R_m^{3/2} R^{1/2}}{r^2}$$

En un point donné du fluide, la vitesse comme la racine carrée de R .

6. En combinant l'expression générale de la pression :

$$\frac{p - p_0}{\rho} = \frac{2\dot{R}^2 R + R^2 \ddot{R}}{r} - \frac{1}{2} \frac{\dot{R}^2 R^4}{r^4}$$

et la valeur obtenue à la surface de la bulle :

$$\frac{p_b - p_0}{\rho} \frac{R}{r} = \frac{3}{2} \frac{\dot{R}^2 R}{r} + \frac{R^2 \ddot{R}}{r}$$

on obtient :

$$\frac{p - p_0}{\rho} = \frac{p_b - p_0}{\rho} + \frac{1}{2} \dot{R}^2 \left(\frac{R}{r} - \frac{R^4}{r^4} \right)$$

Lorsque R est beaucoup plus petit que R_m , la vitesse dR/dt est nettement plus grande que $\sqrt{p_0/\rho}$ et le second terme de l'équation donnant la pression est prépondérant :

$$\frac{p - p_0}{\rho} \approx \frac{1}{2} \dot{R}^2 \left(\frac{R}{r} - \frac{R^4}{r^4} \right)$$

La pression atteint un maximum p_{max} en $r = 4^{1/3} R$ tel que :

$$\frac{p_{max} - p_0}{\rho} = \frac{3}{8} 4^{-1/3} \dot{R}^2$$

En tenant compte de la valeur asymptotique de dR/dt lorsque R tend vers 0, la surpression maximale est :

$$p_{max} - p_0 = 4^{-4/3} p_0 \left(\frac{R_m}{R} \right)^3$$

Lorsque R est dix fois plus petit que R_m , et si la pression ambiante p_0 est égale à l'atmosphère, la surpression atteint 160 atmosphères.

■ Réponse Exercice n° 3, partie A, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielle de Paris, 6 Février 2002

1. La solution de polymère a un comportement rhéofluidifiant. Dans la gamme de cisaillement de 0.1 à 1 kHz, le rhéogramme (en coordonnées logarithmiques) montre une variation linéaire de la viscosité en fonction du taux de cisaillement. On a donc un comportement en loi de puissance. La pente de la partie linéaire est à peu près $-2/3$. On a $\eta \propto \dot{\gamma}^{-2/3}$ et $\sigma = \eta \dot{\gamma} \propto \dot{\gamma}^{1/3}$.
2. L'écoulement est stationnaire, donc la somme des forces exercées sur un élément de volume est nulle. Dans cette situation, il est préférable d'écrire que, la vitesse angulaire étant constante, le couple exercé sur un élément de fluide est nul. La symétrie cylindrique impose qu'il n'y ait pas de gradient de pression azimuthal. Le couple résultant est la dérivée par rapport au rayon du produit de la contrainte tangentielle $\sigma_{r\theta}$ et du carré du rayon.
3. Il n'y a pas de composante radiale de vitesse. De plus, la composante tangentielle de la vitesse ne dépend pas de l'angle θ pour des raisons de symétrie. Le seul terme non nul du tenseur des vitesses de déformation est donc :

$$e_{r\theta} = \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right)$$

soit, encore :

$$e_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)$$

Le second terme correspond à la soustraction de la rotation solide. En effet, si $u_\theta = \Omega r$, on ne doit pas trouver de déformation.

4. La contrainte de cisaillement est donnée par :

$$\sigma_{r\theta} = K \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \right]^n$$

où n l'exposant caractérisant le comportement rhéologique du liquide. En reportant cette expression dans l'équation de mouvement, on obtient :

$$(n+2) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + n r \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) = 0$$

En supposant maintenant que le profil de vitesse est de la forme $u_\theta = r^m$, on obtient l'équation :

$$(n+2)(m-1) + n(m-1)(m-2) = 0$$

Soit : $(m-1)(m-1+2/n) = 0$. Les deux solutions sont donc : $m = 1$ et $m = 1 - 2/(n+2)$. On retrouve les solutions $m = \pm 1$ pour un fluide newtonien ($n = 1$). Pour le fluide rhéofluidifiant avec $n = 1/3$, les deux solutions sont $m = 1$ et $m = -5$.

5. Les conditions aux limites pour le champ de vitesse sont l'absence de glissement sur les solides des cylindres.

Partie B

Préambule

Les différents phénomènes physiques qui interviennent dans le mouvement de liquides dans des tubes vidés par gravité sont : la viscosité et l'inertie du fluide, la gravité et la tension de surface entre le liquide et l'air. Le rapport de l'inertie et de la viscosité est le nombre de Reynolds Re sur la vitesse U , sur le rayon du tube R et sur la viscosité cinématique du liquide ν .

Pour comparer l'effet de la viscosité et de la tension interfaciale, il faut comparer les grandeurs des contraintes visqueuses $\sigma_v \approx \eta U/R$ et de la pression capillaire $p_c \approx \gamma/R$. Le rapport de ces deux quantités est le nombre capillaire $Ca = \eta U/\gamma$.

Pour comparer l'effet de la gravité et de la tension superficielle, il faut comparer la pression hydrostatique $p_h \approx \rho g R$ et la pression capillaire. Le rapport de ces deux quantités est le nombre de Bond $Bo = \rho g R^2/\gamma$.

Il est naturellement possible de construire d'autres nombres sans dimension, comme le nombre de Weber, rapport de l'inertie sur la tension de surface : $We = \rho U^2 R/\gamma$.

■ Réponse Partie B, Questions 2, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielle de Paris, 6 Février 2002

Vidange de tubes ouverts à leur extrémité supérieure

1. D'après la fig. 3, les temps de vidange s'échelonnent entre 1 et 100s. Avec des tubes de l'ordre du m, cela correspond à des vitesses variant entre 1cm/s et 1m/s. Le diamètre des cylindres est de l'ordre de 10 cm. Le nombre de Reynolds est donc compris entre 1 et 100. Il est toujours beaucoup plus grand que un.
2. Le nombre de Reynolds étant beaucoup plus grand que un, les effets de la viscosité sont négligeables. Lorsque le tube est entièrement ouvert en bas, on peut considérer que le liquide tombe en chute libre. On a donc un mouvement uniformément accéléré avec une vitesse croissant au cours du temps : $v = gt$ et une position de l'interface $z_i - z_0 = -(1/2)gt^2$. En éliminant le temps, on obtient : $v(z_i = \sqrt{2g|z_0 - z_i|})$.
3. Lorsque le tube n'est ouvert à la partie basse que par un orifice de diamètre d beaucoup plus petit que D_0 , le liquide n'est plus en chute libre. Si la variation de vitesse est assez lente, on peut considérer l'écoulement comme quasi-stationnaire et appliquer la loi de Bernoulli entre la surface libre et l'orifice. D'où :

$$p_0 + \rho g z_i + \frac{1}{2} \rho v(z_i)^2 = p_0 + \frac{1}{2} \rho v(0)^2$$

la pression étant égale à la pression atmosphérique en haut et en bas du tube. compte de la conservation du débit : $d^2 v(0) = D_0^2 v(z_i)$, il vient :

$$2gz_i = v(z_i)^2 \left[\left(\frac{D_0}{d} \right)^4 - 1 \right]$$

Le diamètre d étant beaucoup plus petite que celui du tube, la vitesse est :

$$v(z_i) \approx \left(\frac{D_0}{d} \right)^2 \sqrt{2gz_i}$$

4. Pour le premier cas, le temps de vidange est simplement le temps de chute li $\sqrt{2z_0/g}$. Pour une hauteur de chute de 1m ce temps est de l'ordre de 1/2 s. Dans le deuxième cas, en intégrant la relation entre vitesse et position de l'int obtient :

$$\sqrt{2z_i} - \sqrt{2z_0} = - \left(\frac{D_0}{d} \right)^2 \sqrt{g} t$$

Le temps de vidange est donc cette fois : $T_V = \sqrt{2z_0/g} (D_0/d)^2$.

5. Dans le premier régime ($d \approx D_0$), le mouvement est uniformément accéléré. Sur l'expérimentales, ce régime n'est observé que pour $d/D_0 = 1$. Dans le deuxième vitesse décroît au cours du temps. Ce régime est clairement observé pour $d/D_0 <$ les valeurs intermédiaires de d/D_0 , on observe le passage d'un régime à l'autr changement de courbure dans le diagramme $z_i(t)$.

■ Réponse Partie B, Questions 3, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielle de Paris, 6 Février 2002

Vidange de tubes fermés à leur extrémité supérieure

Tubes de grand diamètre

1. Dans le diagramme vitesse/diamètre en coordonnées logarithmiques, les points caractéristiques sont à peu près alignés, ce qui suggère que U varie comme une puissance de F et la pente de la droite est voisine de 0.6.
2. Pour le plus petit diamètre (1cm) le nombre de Reynolds, construit sur le diamètre, est de l'ordre de 10^3 . Pour le plus grand diamètre, Re est de l'ordre de 24000.
3. Le nombre de Reynolds est toujours beaucoup plus grand que un, les effets de viscosité sont donc négligeables. Le nombre de Bond (en prenant la tension superficielle) est également toujours plus grand que un. Les effets de la capillarité sont négligeables. L'écoulement est donc gouverné par l'inertie et la gravité.
4. Dans le référentiel lié à la bulle, l'écoulement est stationnaire et il est possible d'appliquer la loi de Bernoulli sur l'interface liquide-air qui est une ligne de courant. L'apex de la bulle est un point de stagnation et la loi de Bernoulli conduit donc à $u^2 = 2gx$.
5. Le potentiel des vitesses doit satisfaire à l'équation de Laplace, pour que le champ de vitesse satisfasse la condition d'incompressibilité. Les conditions aux limites sur la paroi imposent une vitesse radiale nulle (le liquide ne traverse pas le tube), mais n'imposent rien sur la vitesse axiale, si on néglige la viscosité. D'autre part, l'interface entre le liquide et la bulle est une ligne de courant.

Dans le référentiel où la bulle est immobile, le liquide se déplace, en moyenne à la vitesse U . Ceci explique le terme en $-Ux$ dans le potentiel. Compte tenu de l'expression du potentiel en coordonnées cylindriques, on vérifie que le produit $\exp(x)J_0(r)$ est bien harmonique. La composante radiale de vitesse est la dérivée du potentiel par rapport à r . Pour que la vitesse radiale s'annule en $r = R$, il est nécessaire que K_1 soit un zéro de la dérivée de J_0 .

6. Les résultats expérimentaux et théoriques sont :

Diamètre (cm)	1.23	2.16	5.14	7.94
U (cm/s)	10	14.8	24.6	30
U _{th} (cm/s)	11.3	15	23.1	28.7

Les résultats théoriques sont très proches des résultats expérimentaux.

Tubes de petit diamètre

1. Le rayon critique est déterminé par le nombre de Bond qui compare les effets de la (déstabilisant ici) et les effets de la tension superficielle (qui stabilisent l'interface ici a pas lieu de faire apparaître des paramètre dynamiques comme Re ou Ca puisqu'ici de déterminer le seuil au delà duquel se produit l'écoulement.
2. L'épaisseur b étant beaucoup plus petite que R , on peut assimiler l'écoulement à du lément sur une paroi verticale plane. L'équation de mouvement est alors :

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho g$$

puisque'il n'y a pas de gradient de pression dans la direction verticale, l'épaisseur étant constante. Les conditions aux limites pour u sont vitesse nulle sur la paroi (y contrainte nulle sur la surface libre ($y = b$). En intégrant deux fois l'équation de mouvement par rapport à y , on obtient le champ de vitesse :

$$u(y) = \frac{g}{2\nu}(y^2/2 - yb)$$

En intégrant le champ de vitesse de $y = 0$ à $y = b$ on obtient le débit par unité de du film :

$$q = \int_0^b u dy = -\frac{gb^3}{3\nu}$$

La valeur négative de q correspond simplement au fait que le liquide s'écoule vers Pour avoir le débit total, il faut multiplier par la circonférence du tube: $Q = 2\pi Rq$. Le débit de liquide qui s'écoule dans le film d'épaisseur b doit être égal à la quantité de liquide déplacé (par unité de temps) par la bulle qui remonte, soit : $2\pi Rq = \pi(R - b)^2 U$. b est très petit devant R , on peut faire l'approximation : $2q \approx RU$, qui conduit à :

$$\frac{\rho g b^2}{3\eta U} \approx \frac{R}{2b}$$

3. Dans cette région de l'écoulement, on utilise l'approximation de lubrification, en supposant que h varie lentement avec x . L'équation de mouvement est :

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho g + \frac{\partial p}{\partial x}$$

On intègre cette équation comme précédemment pour le film d'épaisseur constante, les conditions aux limites sont différentes. D'une part, on se place dans le référentiel où la bulle est fixe. La paroi solide se déplace à la vitesse $-U$. D'autre part, il faut tenir compte de la courbure de l'interface et de la pression capillaire pour déterminer le champ de pression dans le film. Comme précédemment, la contrainte de cisaillement sur l'interface liquide est nulle.

Une première intégration par rapport à y de l'équation de mouvement donne :

$$\eta \frac{\partial u}{\partial y} = \rho g y + \frac{\partial p}{\partial x} y + C_1$$

Une seconde intégration, en tenant compte de $u(0) = -U$ donne le champ de vites

$$u(y) = \frac{1}{\eta} \left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial x} \right) \left(\frac{y^2}{2} - yh \right) - U$$

Une dernière intégration sur y donne le débit par unité de longueur sur la circonfé

$$q = -\frac{h^3}{3\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \right) - Uh$$

Dans la région où l'épaisseur du film est constante et égale à b , il n'y a pas de gr
pression. Le débit est donc :

$$q = -\frac{b^3}{3\eta} \rho g - Ub$$

4. En écrivant les deux expressions trouvées ci-dessus pour le débit q , on obtient :

$$-\frac{h^3}{3\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \right) = -\frac{b^3}{3\eta} \rho g + U(h - b)$$

La pression dans le film liquide est reliée à la pression p_0 dans la bulle par la
capillaire :

$$p = p_0 - \gamma \left(\frac{d^2 h}{dx^2} + \frac{1}{R - h} \right)$$

en supposant que la courbure de l'interface dans le plan axial est assez faible pour l
à la dérivée seconde de h .

■ Exercice n° 1, partie A, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles de Paris, 25 juin 2001

Amortisseur à air de Curie

Les plateaux d'une balance sont munis chacun d'un amortisseur à air constitué par une cylindrique mince C de rayon R qui peut pénétrer plus ou moins profondément dans l'espace compris entre deux cylindres coaxiaux voisins (fig. 1).

Au cours du déplacement, les parois de la cloche restent à une distance constante h de ces cylindres, h étant très petit devant R .

h est égal à 1mm, la longueur d'enfoncement de la cloche l est de l'ordre de 10 cm. La viscosité dynamique de l'air est $\eta = 1,8 \times 10^{-5} \text{Pa.s}$ et sa masse volumique est $1,3 \text{kg/m}^3$.

1. Montrer qualitativement que on peut assimiler l'écoulement dans l'interstice entre la cloche et les cylindres à un écoulement de Poiseuille entre deux plans.
2. Quelle est la différence de pression $p - p_0$ entre l'intérieur et l'extérieur de la cloche lorsque celle-ci se déplace à la vitesse V supposée constante?
3. Montrer que la force s'exerçant sur la cloche est :

$$F = \frac{12\pi\eta l R^3}{h^3} V$$

4. Quel est le type d'amortissement des petits mouvements de la balance provoqué par l'amortisseur à air?
5. Lorsque la cloche effectue de petites oscillations à la fréquence ω peut-on encore faire l'approximation de vitesse V constante pour calculer le coefficient d'amortissement? jusqu'à quelle valeur de ω en ordre de grandeur?

■ Exercice n° 2, partie A, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles de Paris, 25 juin 2001

Véhicules à propulsion humaine

Bien que la puissance développée par un être humain soit très limitée (550 W pour un cycliste plus ou moins gavé d'EPO), il est possible de fabriquer, avec les matériaux modernes,

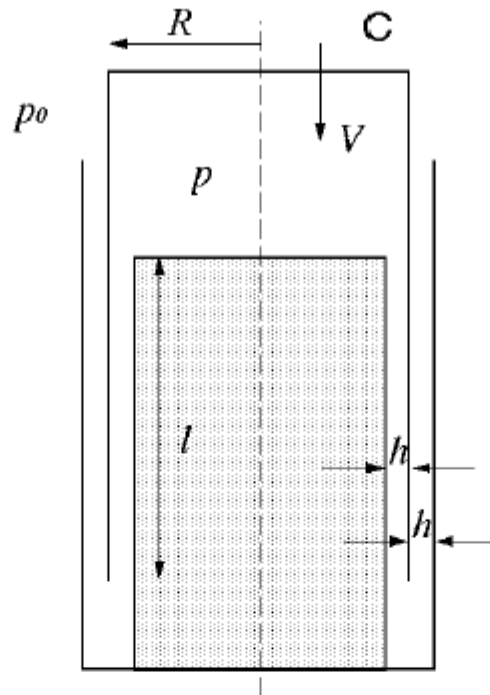


FIG. 1 – Schéma de l'amortisseur à air

véhicules à propulsion humaine assez efficaces. Le record de vitesse terrestre (sur une distance de 200 m) est actuellement près de 120 km/h, vitesse atteinte par un vélo caréné représenté en fig. 2. Les dimensions du carénage sont : longueur 2,85 m, hauteur 0,70 m et largeur 0,55 m.

1. Estimer le nombre de Reynolds de l'écoulement. Que pouvez-vous en conclure sur la nature de l'écoulement ?
2. En supposant que le pilote développe une puissance de 400 W, estimer la force de traînée et le coefficient de traînée du vélo caréné.
3. Si on fait l'hypothèse que la couche limite sur le carénage reste laminaire et si on compare l'écoulement à celui rencontré sur une plaque plane, quelle serait la force de traînée ? Comment se compare-t-elle à l'estimation faite à partir de la puissance dissipée ? Que pouvez-vous conclure sur l'écoulement dans la couche limite ?
4. Le même pilote intrépide essaye maintenant de s'élever du sol dans un avion à propulsion humaine. La principale difficulté est la puissance requise pour assurer le vol. Montrez que la puissance motrice requise P_m est proportionnelle à la masse du pilote M_{pil} , sachant que les contraintes mécaniques imposent que la masse propre de l'avion M_{av} soit à peu près égale à la moitié de M_{pil} .
5. L'expérience montre que la puissance musculaire varie à peu près linéairement avec la masse d'un individu (pour des personnes correctement entraînées et sans surcharge pondérale). La puissance spécifique disponible pour un effort de longue durée est de l'ordre de 4 W/kg. Un pilote de petite taille est-il préférable à un pilote de grande taille ou bien est-ce indifférent ?

Ecoulement de fluide complexe dans un tube vertical

On place un liquide visqueux dans un grand tube vertical (rayon R de l'ordre de quelques mètres, longueur L de l'ordre du m) terminé à son extrémité inférieure par un tube de diamètre plus petit (rayon a de l'ordre du mm et longueur l de l'ordre de quelques cm). Le tube est ouvert à l'atmosphère à son extrémité supérieure. Une vanne permet d'ouvrir ou de fermer le tube (fig. 3).

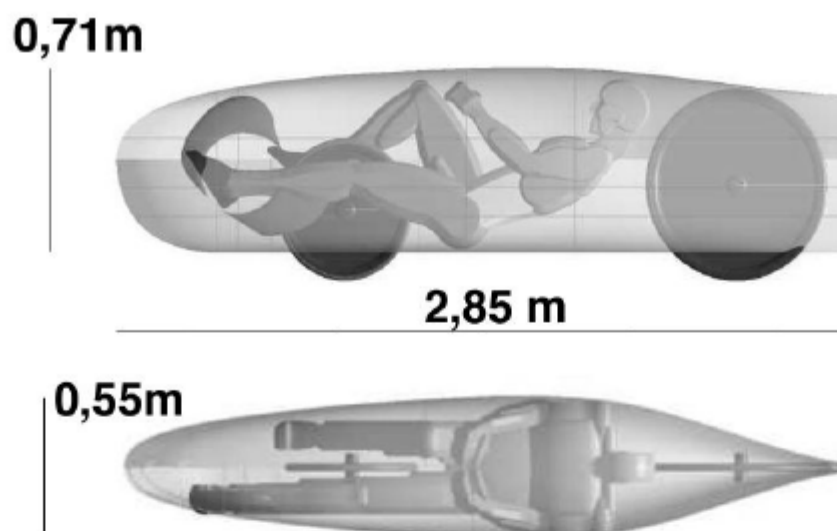


FIG. 2 – Schéma du vélo caréné, vu de côté et de dessus.

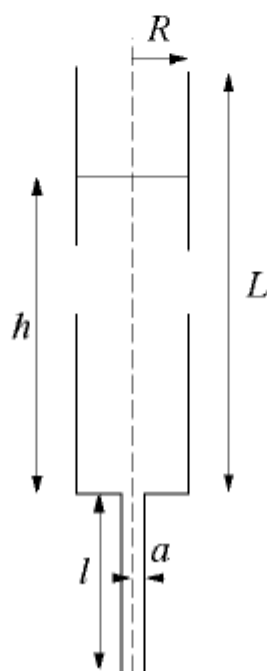


FIG. 3 – Schéma de l'écoulement dans un tube vertical

On ouvre le robinet et on mesure le débit en fonction du temps. On constate que diminue au cours du temps et qu'il est proportionnel au carré de la hauteur de liquide grand tube.

1. Pour interpréter cette expérience, on analyse l'écoulement dans le petit tube. E pourquoi on peut considérer, en première approximation, que la répartition de pre hydrostatique dans le grand tube.
2. Le fluide complexe a une loi de comportement en écoulement telle que:

$$\sigma = K \dot{\gamma}^n = K \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^n$$

où σ est la contrainte tangentielle σ_{xr} (x étant la coordonnée verticale le long de tube et r la coordonnée radiale).

En écrivant l'équilibre mécanique d'un élément de fluide cylindrique montrer que la c tangentielle est donnée par:

$$\sigma = \frac{r}{2} \frac{\partial p}{\partial x}$$

où p est l'écart à la pression hydrostatique.

3. Montrer que le champ de vitesse dans le petit tube est donné par:

$$u = \left(\frac{1}{2K} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{1/n} \frac{1}{\frac{1}{n} + 1} \left(r^{\frac{1}{n}+1} - a^{\frac{1}{n}+1} \right)$$

et que le débit est de la forme:

$$Q = -A \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^{1/n} a^{\frac{1}{n}+3}$$

4. Montrer que la hauteur de liquide dans la grande colonne h obéit à une équation diff du type:

$$\frac{dh}{dt} = -Bh^{1/n}$$

5. Comment peut-on qualifier le comportement rhéologique du fluide contenu dans le

■ Partie B, Question 1, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles de Paris, 25 juin 2001

Partie B

Films et rideaux liquides

Ce problème concerne les écoulements de liquides dans des films de savon (formés de molécules tensioactives) et dans des rideaux de liquides visqueux sans tensioactifs.

1. Drainage des films de savon

Lorsqu'on forme un film de savon sur un cadre rectangulaire vertical, on constate que le film se draine progressivement par gravité. Il est possible de suivre l'évolution du film au cours du temps en suivant les franges d'interférence colorées formées par la réflexion de la lumière sur les deux faces du film. Selon la nature du surfactant les modes de drainage sont très différents. Nous traitons uniquement du drainage des films de savon "rigides"

Le surfactant est tel qu'il forme deux surfaces semi-rigides entre lesquelles est emprisonnée une mince couche d'eau (viscosité dynamique $\eta = 10^{-3}$ Pa.s. L'étude des franges d'interférence permet de mesurer l'épaisseur h du film ne dépasse pas quelques microns, et que la vitesse de drainage est de l'ordre de 1 mm/s .

1. Estimer l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds associé à l'écoulement. Quelles approximations que l'on peut faire sur l'écoulement, compte tenu de la valeur du nombre de Reynolds et de la géométrie de l'écoulement ?

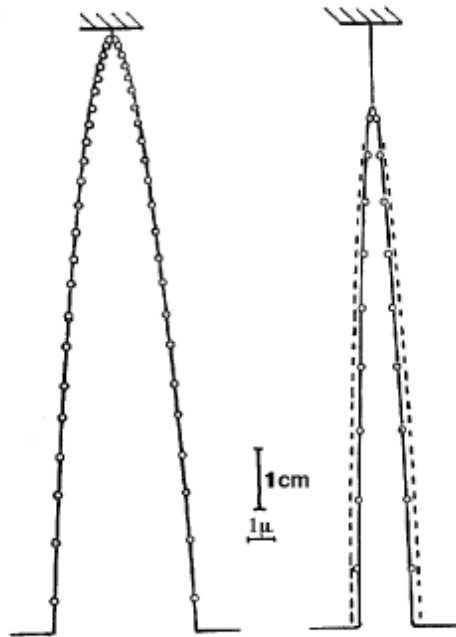


FIG. 4 – *Forme d'un film de savon rigide se drainant par gravité, à deux instants différents.*

2. Le surfactant utilisé pour réaliser le film est tel qu'il bloque les mouvements de la surface du film. Le liquide est confiné dans un " sac " déformable. En négligeant la tension superficielle (rendue très faible par la présence de surfactant), le débit de liquide dans le film est :

$$Q(x) = \frac{gh^3}{12\nu}$$

où ν est la viscosité cinématique du liquide et x la coordonnée verticale. Montre que la conservation de la masse impose une relation entre le débit vertical de liquide et la variation temporelle de l'épaisseur du film. Montrer que cette relation de conservation de masse s'écrit :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{gh^2}{4\nu} \frac{\partial h}{\partial x}$$

3. L'expérience montre que les profils verticaux du film restent homothétiques au temps (voir fig. 4). On cherche donc des solutions de l'équation de conservation en fonction des variables x et t , soit : $h(x,t) = F(x)G(t)$. Déterminer les fonctions F et G .

■ Partie B, Question 2, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles de Paris, 25 juin 2001

2. Rideaux liquides

La fabrication de couches minces liquides déposées sur un support solide peut utiliser des techniques différentes. L'une d'entre elles est le "couchage en rideau" (curtain coating) qui consiste à créer un rideau liquide plan qui tombe sur le substrat solide à recouvrir.

2.1 Profil de vitesse

On cherche tout d'abord à établir le champ de vitesse dans le rideau liquide qui s'écoule sous l'effet de la gravité. On choisit le système de coordonnées suivant : x est dans la direction de l'écoulement, y est perpendiculaire au rideau et z est dans le plan du rideau et dans le plan horizontal. On note $h(x)$ l'épaisseur du rideau et Q le débit de liquide *par unité de longueur* dans la direction x . La composante de vitesse suivant z est nulle.

1. Pourquoi peut-on négliger, en première approximation, la friction de l'air sur le rideau ? Quelle est la conséquence de cette approximation sur le profil de la composante de vitesse dans la direction y ?

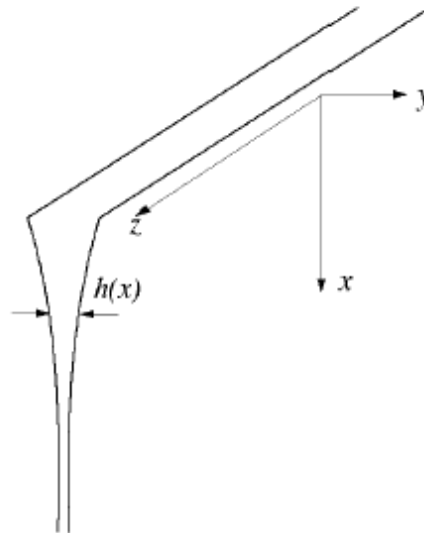


FIG. 5 – Schéma du rideau liquide vertical

2. Montrer que, si on néglige les effets de la tension superficielle, la contrainte normale direction x est donnée par :

$$\sigma_{xx} = -p_0 + 4\eta \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

où p_0 est la pression dans l'air.

3. Ecrire la conservation de la quantité de mouvement sur un élément de rideau et montrer qu'elle conduit à :

$$\rho Q \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{xx} h) + \rho g h$$

Montrer que l'équation (10) se met sous la forme :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 4\nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{u_x} \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{g}{u_x}$$

4. On cherche à mettre cette dernière équation sous une forme adimensionnelle. C est une vitesse caractéristique $U = (4\nu g)^{1/3}$. Quelle est la longueur caractéristique L l'équation 11 se met sous la forme :

$$\frac{d}{dX} \left(\frac{1}{u} \frac{du}{dX} \right) + \frac{1}{u} - \frac{du}{dX} = 0$$

où $u = u_x/U$ et $X = x/L$ sont des variables sans dimension.

Calculer U et L lorsque $\eta = 0,26 \text{ Pa.s}$ et $\rho = 0,98 \text{ g/cm}^3$.

5. Montrer qu'en l'absence de viscosité la vitesse du fluide serait telle que :

$$u_x^2 = V^2 + 2gx$$

où V est la vitesse du liquide en haut du rideau. Si la vitesse du fluide obéissait à l'approche (13), quelle serait l'importance relative des termes de l'équation exacte (1) quelles conditions peut-on négliger l'influence de la viscosité pour déterminer la vitesse du rideau liquide ?

2.2 Ondes dans les rideaux liquides

Deux types d'ondulation existent pour les rideaux liquides : des ondes symétriques (antitiques) où les deux interfaces se déplacent en opposition de phase et des ondes antisymétriques où les deux interfaces se déplacent en phase (fig. 6).

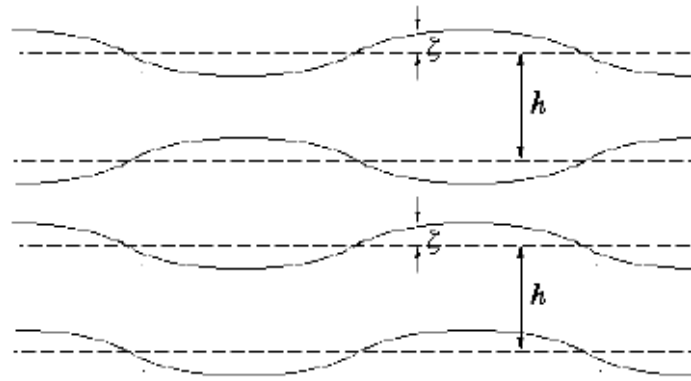


FIG. 6 – Ondes symétriques (en haut) et antisymétriques (en bas) dans un rideau liq

Pour décrire l'écoulement de perturbation correspondant aux ondes antisymétriques, c un potentiel de vitesse de la forme :

$$\Phi = aw_a \sinh ky \cos k(x - w_a t)$$

où w_a est la vitesse de phase des ondes et k leur vecteur d'onde.

1. Justifier le choix d'un tel potentiel de vitesse pour décrire les ondes antisymétriques
2. Montrer que le déplacement des deux surfaces libres correspondant au choix de Φ - (14) - est :

$$\zeta = a \cosh(kh/2) \sin k(x - w_a t)$$

3. Montrer que la perturbation de pression dans le rideau provoquée par les ondes antisymétriques est, dans l'approximation des ondes de très petite amplitude :

$$p \approx \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

4. Montrer que les conditions aux limites sur l'interface conduisent à :

$$\rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{y=\pm h/2} = -\gamma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

où γ est la tension superficielle du liquide.

5. Montrer que dans la limite des grandes longueurs d'onde (c'est-à-dire $kh \ll 1$) l'angle des ondes antisymétriques est indépendante de la longueur d'onde et égale à $\sqrt{2\gamma/\rho}$
6. Lorsqu'on perturbe un rideau liquide par un objet (une petite aiguille, par exemple) observe souvent un sillage en forme de V avec deux branches rectilignes partant de la perturbation. Comment varie l'angle au sommet du V en fonction de la vitesse fluide dans le rideau ?

2.3 Courbure des rideaux liquides

Dans certaines conditions de fonctionnement, une différence de pression est imposée entre les deux faces du rideau liquide. On cherche à déterminer la forme du rideau en fonction de la différence de pression. On suppose que les effets de la viscosité sont négligeables. On note \hat{e}_z les vecteurs unitaires respectivement vertical, normal au rideau et tangent au rideau (f

1. Montrer que l'équilibre mécanique du rideau s'écrit :

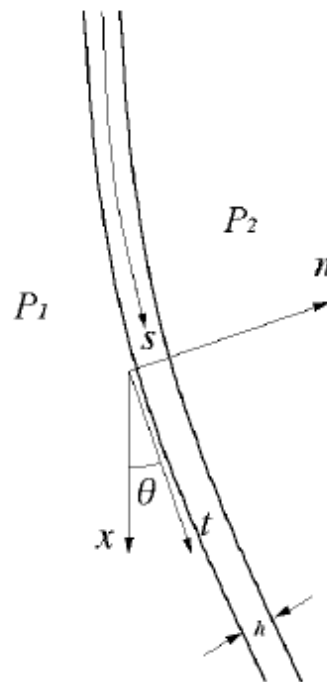


FIG. 7 – Schéma du rideau liquide courbé et définition des axes de coordonnées.

où P_1 et P_2 sont les pressions de part et d'autre du rideau, γ est la tension de surf liquide, θ est l'angle entre la verticale et le rideau liquide et s est l'abscisse curviligne du rideau. La courbure du rideau est donnée par la dérivée de l'angle par rapport à l'abscisse curviligne: $d\theta/ds$.

2. En projetant l'équation (18) sur la normale \hat{n} au rideau, on obtient :

$$(\rho Q u - 2\gamma) \left(\frac{d\theta}{ds} \right) + \rho g h \sin \theta = P_1 - P_2$$

Quelle est la signification physique des différents termes du membre de gauche de l'équation (19) ?

3. Pour écrire l'équation (19) sous une forme adimensionnelle, on utilise les variables $u' = u/V_s$ et $x' = 2xg/V_s^2$ où la vitesse V_s est telle que: $V_s = 2\gamma/\rho Q$.

Quelle est la signification physique des paramètres sans dimension u' et x' ? Comment la courbure du rideau lorsqu'on passe d'une situation à $u' < 1$ vers une situation à $u' = 1$? (On ne se préoccupe pas de la situation singulière rencontrée lorsque $u' = 1$.)

■ Réponse Exercice n° 1, partie A, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielle de Paris, 25 juin 2001

Amortisseur à air de Curie

1. L'épaisseur de l'interstice h est très petite devant l , l'écoulement peut donc être considéré comme unidimensionnel. D'autre part le rayon de la cloche est très grand devant h , donc considérer que l'écoulement d'air est équivalent à un écoulement de Poiseuille plan dans un canal de section rectangulaire d'épaisseur h , de longueur $2l$ et de largeur $2\pi R$.
2. Lorsque la cloche se déplace à la vitesse V , le débit d'air est : $Q = \pi R^2 V$. Dans un écoulement de Poiseuille plan, le débit et le gradient de pression sont reliés par :

$$Q = \frac{h^3 w}{12\eta} \nabla p$$

où w est la largeur de l'écoulement. D'où :

$$\pi R^2 V = \frac{2\pi R h^3}{12\eta} \frac{p - p_0}{2l}$$

Soit :

$$p - p_0 = \frac{12\eta l R V}{h^3}$$

3. la force s'exerçant sur la cloche est l'intégrale de la pression sur sa surface : $\pi R^2 (p - p_0)$. Le terme de frottement sur les parois latérales est nul parce qu'il y a une compensation de la contrainte de cisaillement exercée sur la paroi extérieure de la cloche et la contrainte de cisaillement exercée sur la paroi intérieure. la force est donc :

$$F = \frac{12\pi\eta l R^3}{h^3} V$$

4. La cloche exerce un amortissement de type visqueux avec une force proportionnelle à la vitesse de déplacement. Les oscillations de la balance sont amorties exponentiellement.
5. Pour que le raisonnement fait ci-dessus soit valide, il faut que l'écoulement de Poiseuille s'établisse dans l'interstice d'épaisseur h . Le temps nécessaire à la quantité de mouvement pour diffuser sur une longueur h est, en ordre de grandeur, $t_D = h^2/\nu$. Si la fréquence est inférieure à $1/t_D$ (soit 15 Hz pour les données de l'énoncé), on peut considérer l'écoulement comme quasi-stationnaire.

■ Réponse Exercice n° 2, partie A, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielle de Paris, 25 juin 2001

Véhicules à propulsion humaine

1. La vitesse est 33 m/s. En prenant la longueur du carénage (2,85m) comme longueur caractéristique, le nombre de Reynolds est 6.3×10^6 . L'écoulement autour du carénage est doute turbulent.
2. En négligeant les sources de dissipation autres que la traînée aérodynamique, la puissance motrice P équilibre le travail de la traînée T , soit $P = TV$. La force de traînée est de l'ordre de 12 N. Le coefficient de traînée C_D est défini par : $T = 0.5\rho V^2 SC_D$ où S est la surface frontale du véhicule (on peut également utiliser la surface latérale comme référence). Avec une surface frontale $S = 0.70 \times 0.55 = 0.38\text{m}^2$, le coefficient de traînée est 4.5×10^{-3} . Prenant la surface latérale $S_L = 0.70 \times 2.85 = 1.99\text{m}^2$, le coefficient de traînée est 8.6×10^{-3} .
3. Pour une couche limite laminaire, la force de traînée est :

$$T = 0.66 \times 0.5\rho V^2 S_L Re_L^{-1/2}$$

où Re_L est le nombre de Reynolds calculé sur la longueur de l'objet. Avec les paramètres trouvés plus haut, la traînée serait égale 0,07 N. Cette valeur est beaucoup plus petite que la valeur calculée avec la puissance dissipée. Il faut donc certainement considérer la turbulence dans la couche limite, voire le décollement de la couche limite pour avoir une estimation correcte de la traînée.

4. Pour décoller, la force portante $F_p = 0.5\rho V^2 SC_L$ doit excéder le poids total en charge de l'avion, soit : $F_p > (M_{pil} + M_{av})g \approx 1.5M_{pil}g$. D'autre part, la puissance motrice équilibre la puissance dissipée qui est le travail par unité de temps de la force de traînée : $P_m = 0.5\rho V^3 SC_D$. La vitesse est donc proportionnelle à $P_m^{1/3}$ et la force portante proportionnelle à $P_m^{2/3}$. Pour décoller la puissance motrice doit donc varier comme $M_{pil}^{3/2}$.
5. La puissance motrice disponible est proportionnelle à M_{pil} . D'autre part, P_m doit équilibrer une quantité proportionnelle à $M_{pil}^{3/2}$. Si la puissance spécifique du pilote est trop faible, l'inégalité n'est jamais satisfaite. En revanche, si la puissance spécifique est assez grande, il existe un poids limite au-delà duquel la puissance motrice n'est pas suffisante. Il est donc préférable d'avoir un pilote léger.

■ Réponse Exercice n° 3, partie A, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielle de Paris, 25 juin 2001

Écoulement de fluide complexe dans un tube vertical

1. Le rapport des sections entre les deux tubes est tel que la vitesse dans le grand tube est petite que celle dans le petit tube dans un rapport $a^2/R^2 < 10^{-2}$. La perte de charge par viscosité est donc beaucoup plus faible dans le grand tube (à débit égal, le gradient de p varie comme l'inverse de la puissance quatrième du diamètre). On peut donc considérer que la répartition de pression dans le grand tube est proche de la pression hydrostatique, à-dire qu'au bas du grand tube : $p \approx p_0 + \rho gh$.
2. Si l'écoulement est quasi stationnaire, on peut écrire que la somme des forces sur un élément de fluide est nulle. Considérons un élément de volume centré sur l'axe du tube, de rayon r et de longueur dx . La somme des forces sur cet élément est :

$$\pi r^2(P(x) - P(x + dx)) + \rho g \pi r^2 dx - 2\pi r dx \sigma = 0$$

Soit :

$$-r \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g r - 2\sigma = 0$$

En introduisant l'écart à la pression hydrostatique : $p = P + \rho gx$, on obtient :

$$\sigma = \frac{r}{2} \frac{\partial p}{\partial x}$$

L'équation de mouvement est :

$$\frac{r}{2} \frac{\partial p}{\partial x} = K \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^n$$

Soit, en élevant les deux membres à la puissance $1/n$:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \left(\frac{1}{2K} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{1/n} r^{1/n}$$

Pour un écoulement unidimensionnel, la condition d'incompressibilité impose que u ne dépende pas de x . u ne dépend donc que de r et on peut intégrer l'équation en r pour donner, en tenant de la condition aux limites $u = 0$ en $r = a$ (condition de non glissement sur la paroi solide) :

$$u = \left(\frac{1}{2K} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{1/n} \frac{1}{\frac{1}{n} + 1} \left(r^{\frac{1}{n} + 1} - a^{\frac{1}{n} + 1} \right)$$

Le débit est :

$$Q = \int_0^a 2\pi r u(r) dr$$

La vitesse étant proportionnelle à $r^{\frac{1}{n}+1}$, le débit qui est dimensionnellement le produit de la vitesse par une surface est donc proportionnel à $a^{\frac{1}{n}+3}$, soit :

$$Q = -A \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^{1/n} a^{\frac{1}{n}+3}$$

3. La surpression en haut du petit tube est ρgh et le gradient de pression dans le pe est donc proportionnel à h/l . D'autre part, la variation de h au cours du temps est proportionnelle au débit Q , d'où :

$$\frac{dh}{dt} = -Bh^{1/n}$$

4. Si le débit est proportionnel au carré de la hauteur h , l'exposant n est égal à $1/2$ et le fluide est rhéofluidifiant ($n < 1$).

■ Réponse Partie B, Questions 1, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielle de Paris, 25 juin 2001

Partie B

Films et rideaux liquides

1. Drainage des films de savon

1. En preant une vitesse de 1 mm/s, une dimension caractéristique égale à 10 m, le nombre de Reynolds est : $Re = 0,1 \times 10^{-4} / 10^{-2} = 10^{-3}$. Le nombre de Reynolds est très petit devant 1, on peut négliger les termes inertiels dans l'équation de mouvement. De plus, la géométrie de l'écoulement (épaisseur du film très petite devant sa longueur) permet d'utiliser l'approximation de lubrification.
2. Dans l'approximation de lubrification, la vitesse suivant x est beaucoup plus grande que la vitesse suivant y . L'équation de Stokes se réduit à :

$$\eta \Delta u_x = \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g$$

u_y étant très petit, la pression est indépendante de y . Si on néglige les effets de tension superficielle, il n'y a pas de différence de pression entre l'intérieur du film et le gaz environnant. La pression dans le film est donc constante et il n'y a pas de gradient de pression. L'équation de Stokes se ramène donc à :

$$\nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = -g$$

On peut intégrer cette équation deux fois en y :

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{gy}{\nu} + A$$

$$u_x = -\frac{gy^2}{2\nu} + Ay + B$$

Les constantes d'intégration sont données par les conditions aux limites sur les parois du film, en l'occurrence vitesse nulle sur les parois : $u_x = 0$ en $y = 0$ et $y = h$. D'où :

$$u_x = -\frac{g}{2\nu}(y^2 - h^2)$$

Le débit (par unité de longueur dans la direction z) est :

$$Q = \int_0^h u(y) dy = \frac{gh^3}{12\nu}$$

Il faut écrire la conservation de la masse sur un élément de film de hauteur dx :

$$Q(x) - Q(x + dx) = \frac{\partial h}{\partial t} dx$$

Soit :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{gh^2}{4\nu} \frac{\partial h}{\partial x}$$

3. L'équation de conservation s'écrit :

$$FG' = -\frac{gF^2G^2}{4\nu}GF'$$

soit :

$$\frac{G'}{G^3} = -\frac{g}{4\nu} FF'$$

Ce qui conduit à : $G^2 \propto 1/t$ et $F^2 \propto t$ et : $h = \sqrt{4\nu/gx}^{1/2} t^{-1/2}$

■ Réponse Partie B, Questions 2, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielle de Paris, 25 juin 2001

2. Rideaux liquides

2.1 Profil de vitesse

1. La viscosité du gaz est très inférieure à celle du liquide. On peut donc, en première approximation, négliger la contrainte de cisaillement imposé par le gaz sur la surface liquide. En conséquence, on peut imposer que la vitesse est uniforme dans l'épaisseur du rideau liquide, c'est-à-dire que u_x est indépendant de y .
2. Pour un fluide newtonien, le tenseur des contraintes est : $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta e_{ij}$. Soit les contraintes normales : $\sigma_{xx} = -p + 2\eta\partial u_x/\partial x$ et : $\sigma_{yy} = -p + 2\eta\partial u_y/\partial y$. Sur le rideau, la contrainte normale est égale à la pression dans le gaz, si on néglige la tension interfaciale. D'où : $-p_0 = -p + 2\eta\partial u_y/\partial y$. D'autre part, les deux composantes de la vitesse sont reliées par la condition d'incompressibilité $\nabla \cdot u = 0$, d'où :

$$\sigma_{xx} = -p_0 + 4\eta \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

3. On considère un élément du rideau de hauteur dx et de largeur unité dans la direction y . Pour un écoulement stationnaire, la conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\int (\sigma_{ij} - \rho u_i u_j) n_j dS + \int \rho f_i dV = 0$$

Le flux de quantité de mouvement entrant est $\rho u(x)^2 h = \rho u(x)Q$, le flux de quantité de mouvement sortant est : $-\rho u(x+dx)Q$. Ce flux de quantité de mouvement est équilibré par le poids du rideau $\rho gh dx$ et par l'intégrale des contraintes. Nous avons considéré que la friction de l'air était négligeable, il ne reste donc plus dans la direction x que la contrainte normale σ_{xx} intégrée sur l'épaisseur h du rideau. Soit :

$$\rho Q[u(x) - u(x+dx)] + \rho gh dx + [h(x+dx)\sigma_{xx}(x+dx) - h(x)\sigma_{xx}(x)] = 0$$

Soit encore :

$$\rho Q \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx} h) + \rho gh$$

L'épaisseur du film est relié à la vitesse par : $Q = uh$. On a donc, en tenant compte de l'expression de la contrainte normale :

$$\rho Q \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(4\eta \frac{Q}{u_x} \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \rho g \frac{Q}{u_x}$$

En divisant par ρQ , on obtient :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{4\nu}{L^2} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial X} \right) + \frac{g}{U} \frac{1}{u}$$

4. On écrit l'équation pour la vitesse en variables sans dimension u et X :

$$\frac{U}{L} \frac{\partial u}{\partial X} = 4\nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{u_x} \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{g}{u_x}$$

Pour que tous les termes soient du même ordre, il est nécessaire que $L \approx 4\nu/U = (4\nu)$.
Avec $\nu = 2.65 \times 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$, $U = 10 \text{cm/s}$ et $L = 1 \text{mm}$.

5. En l'absence de viscosité, l'équation pour la vitesse devient :

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_x^2}{\partial x} = g$$

qui s'intègre en :

$$u_x^2 = V^2 + 2gx$$

où V est la vitesse au sommet du rideau.

En utilisant l'expression approchée de la vitesse et en calculant les trois termes de l'équation exacte, on obtient, en divisant par g/u_x :

$$1 = -4\nu g \frac{1}{u_x^3} + 1$$

soit :

$$1 = -1/u^3 + 1$$

Si la vitesse du fluide est grande devant la vitesse caractéristique U , le terme de viscosité est négligeable et la vitesse est très proche de celle donnée par la loi de chute libre.

3.2 Ondes dans les rideaux liquides

1. La description du champ de vitesse par un potentiel de vitesse implique que l'écoulement soit irrotationnel. Ceci se justifie si la viscosité est négligeable, ce qui a été montré dans la partie précédente. Le potentiel doit obéir à l'équation de Laplace pour satisfaire la condition d'incompressibilité. Si le potentiel est périodique dans la direction x , il doit s'amortir exponentiellement dans la direction y . De plus, pour les ondes antisymétriques, la vitesse en $y = 0$ doit être opposée à la vitesse en $+y$, d'où le terme en $\sinh ky$ dans le potentiel.
2. Sur les interfaces, la condition cinématique impose que la vitesse de déplacement de l'interface soit égale à la vitesse du fluide, soit :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = u_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

et la vitesse en $y = \pm h/2$ est :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = a w_a k \cosh(kh/2) \cos k(x - w_a t)$$

En intégrant cette équation par rapport à t , on obtient :

$$\zeta = a \cosh(kh/2) \sin k(x - w_a t)$$

3. la pression est reliée au champ de vitesse par l'équation de Bernoulli instationnaire :

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho u^2 + p = C^{te}$$

Si l'amplitude a de la perturbation est très petite, le terme en $\partial \Phi / \partial t$ qui est d'ordre a est beaucoup plus grand que le terme en u^2 qui est d'ordre a^2 . D'où :

$$p \approx -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

4. Sur l'interface entre le liquide et le gaz, on doit satisfaire la continuité des contraintes, en prenant en compte la tension superficielle du liquide, soit :

$$p = p_0 - \gamma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

où p_0 est la pression dans le gaz. En tenant compte de la relation entre la pression et le potentiel des vitesses, on a :

$$\rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{y=\pm h/2} = -\gamma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

5. La relation de dispersion s'écrit :

$$\rho a k w_a^2 \sinh(kh/2) \sin k(x - w_a t) = \gamma a k^2 \cosh(kh/2) \sin k(x - w_a t)$$

soit :

$$w_a^2 = \frac{\gamma k}{\rho} \coth(kh/2)$$

Lorsque $kh \ll 1$, $\coth(kh/2) \approx 2/kh$ et la vitesse de propagation est donnée par :

$$w_a^2 = \frac{2\gamma}{\rho h}$$

Elle est indépendante du vecteur d'onde.

6. Les ondes créées par l'obstacle se propagent dans le rideau à la vitesse w_a et sont advectées par l'écoulement global à la vitesse u . L'angle au sommet de cet analogue de "Mach" peut être calculé en écrivant la distance parcourue par l'onde qui se propage à la vitesse w_a et la distance d'entraînement pendant le même temps ut . Le demi-angle du cône θ est donné par $\sin \theta = w_a/u$. On notera que le cône ne peut exister que si l'écoulement est "supersonique" (vitesse du fluide dans le rideau supérieure à la vitesse des ondes). L'angle du cône est d'autant plus petit que l'écoulement est rapide dans le rideau.

3.3 Courbure des rideaux liquides

1. Ecrivons le bilan de quantité de mouvement sur un élément du rideau liquide de longueur \hat{t} . Il faut tenir compte du flux de quantité de mouvement, dans le plan tangent au rideau en s et $s + ds$, de la différence de pression entre les deux faces du rideau et de la pression capillaire due à la courbure du rideau - sur la normale \hat{n} - et, enfin, du poids de cet élément de rideau. Ce qui donne :

$$\frac{d(\rho Q u)}{ds} \hat{t} = (P_1 - P_2) \hat{t} + 2\gamma \frac{d\theta}{ds} \hat{n} + \rho g h \hat{x}$$

2. Le premier terme représente la force centrifuge $\rho u^2/R$ intégrée sur l'épaisseur h . Le deuxième terme est la pression capillaire imposée par la courbure du rideau. Le troisième terme est la projection du poids sur la normale au rideau.
3. La vitesse V_s est telle que, lorsque $u = V_s$, les termes d'inertie (force centrifuge) sont exactement compensés par les termes capillaires dans l'équation d'équilibre du rideau. Le nombre adimensionnel u' est un nombre de Weber, rapport des termes d'inertie aux termes de tension superficielle. La distance $L = V_s^2/2g$ qui permet de définir $x' = x/L$ est la distance nécessaire pour que le fluide atteigne la vitesse V_s s'il tombe en chute libre. Au-delà de la distance L , l'écoulement dans le rideau se fait à nombre de Weber supérieur à 1. Lorsqu'on passe de $u' < 1$ à $u' > 1$, le signe du terme de courbure dans l'équation d'équilibre du rideau change. Pour une même différence de pression, on doit donc passer d'une courbure négative à une courbure positive. Si c'est la tension superficielle qui domine ($u' < 1$), le centre de courbure est du côté de la pression la plus élevée. Si c'est la force centrifuge qui domine ($u' > 1$), le centre de courbure est du côté de la pression la plus basse.

- Exercice n° 1, partie A, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles de Paris, 27 juin 2002

Cisaillement alternatif sur un lit de sable

On provoque l'apparition de rides sur un lit de sable déposé sur une paroi plane, et surmonté d'une couche d'eau, en faisant osciller cette paroi dans son plan. Le mouvement de la paroi solide est décrit par : $X(t) = A \sin(\omega t)$

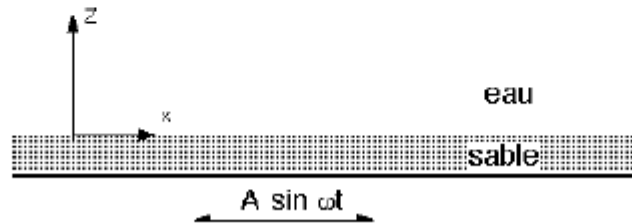


FIG. 1 – Schéma de l'écoulement de cisaillement du lit de sable

On suppose dans un premier temps que le lit de sable reste plan et que le champ reste unidimensionnel. Quelle est l'équation qui régit la composante horizontale de l'écoulement ?
Déterminer, par un raisonnement dimensionnel, l'épaisseur de fluide δ mise en mouvement par la paroi solide.

Donner l'ordre de grandeur du gradient de vitesse à la paroi.

Les conditions expérimentales sont les suivantes :

- Amplitude du déplacement : $A=5$ cm
- Fréquence : $\nu = \omega/2\pi=1$ Hz
- Diamètre des grains de sable : $a=200$ microns

Donner l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds calculé sur la taille des grains. Que peut-on en déduire sur l'expression de la force exercée par l'écoulement sur le lit de sable.

Montrer que le critère de mise en mouvement des grains de sable est donné par un nombre sans dimension suivant (appelé nombre de Shields) :

$$S = \frac{\eta A \omega}{\Delta \rho g a \delta}$$

où $\Delta \rho$ est la différence de masse volumique entre le sable et l'eau et η la viscosité de l'eau.

Comment varie le nombre de Shields avec la fréquence d'oscillation ω ?

- Exercice n° 2, partie A, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles de Paris, 27 juin 2002

Convergent de soufflerie

Dans toutes les souffleries, la section où sont effectuées les mesures est prise sur une section convergente. Cette section a pour but de réduire l'intensité des fluctuations de vitesse.

Les dimensions typiques de la section sont : largeur d'entrée : $H = 50$ cm, contraction linéaire : $\alpha = 1/4$ (fig.2), la vitesse moyenne de l'air à l'entrée : $U = 10$ m/s. Quel est le nombre de Reynolds typique de l'écoulement ? Que pouvez-vous en dire sur la dynamique ?

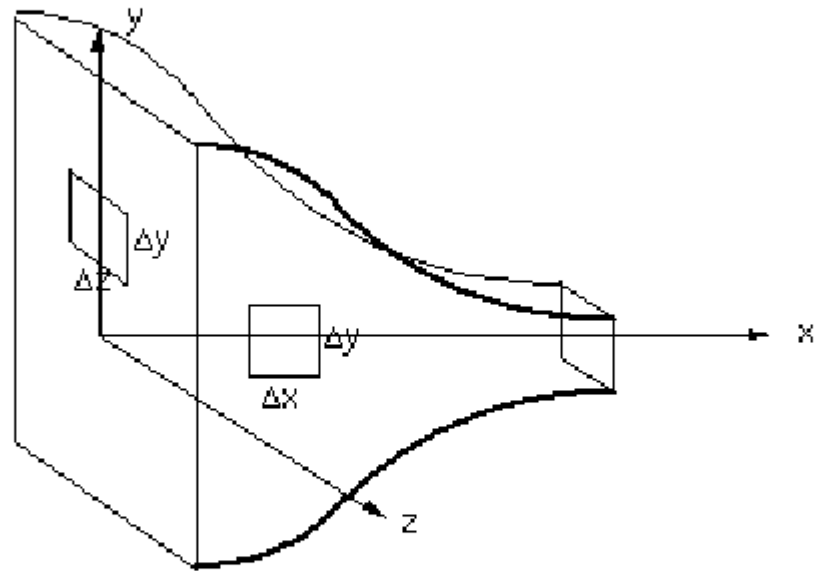


FIG. 2 – Schéma de convergent de soufflerie.

dynamique ?

Quelle relation existe-t-il entre la pression moyenne à l'entrée et à la sortie du convergent ?

Représenter qualitativement l'évolution de la pression sur l'axe du convergent.

Afin d'estimer l'évolution des fluctuations de vitesse le long du convergent, on considère un élément de volume fluide de dimensions Δx , Δy et Δz (fig. 2). L'évolution de la circulation, associée aux fluctuations de vitesse, autour de cet élément est notée C_x , C_y et C_z .

Comment varient les longueurs Δx , Δy et Δz lorsque l'élément de volume fluide se déplace de l'entrée à la sortie du convergent ?

Les fluctuations de vitesse sont représentées par leur ordre de grandeur Δv , Δw et Δu suivant les trois directions x , y et z . Comment varient les circulations $C_z \propto \Delta u \Delta y \Delta z$, $C_y \propto \Delta v \Delta x \Delta z$ et $C_x \propto \Delta w \Delta x \Delta y$ le long du convergent ?

Que peut-on en déduire sur l'évolution des fluctuations longitudinales et transversales de la vitesse le long du convergent ?

- Exercice n° 3, partie A, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles de Paris, 27 juin 2002

Système de séparation hydrodynamique de particules

Un système de séparation hydrodynamique de petites particules est constitué de section rectangulaire, d'épaisseur $h = 100\mu\text{m}$ et de longueur $L = 10\text{cm}$. d'entrée et de sortie du canal sont séparées en deux canaux de largeur égale $h/2$. La vitesse moyenne dans le canal est U . Cette vitesse n'excède pas 1 cm/s . Le fluide est de l'eau.

Les débits d'entrée en A et B sont inégaux, de manière à confiner le fluide sur la partie inférieure du canal. De la même manière, les débits de sortie en C et D sont inégaux, pour confiner le fluide sortant en D sur la partie supérieure du canal. La distance entre les deux lignes de séparation est w que l'on supposera très voisin de h .

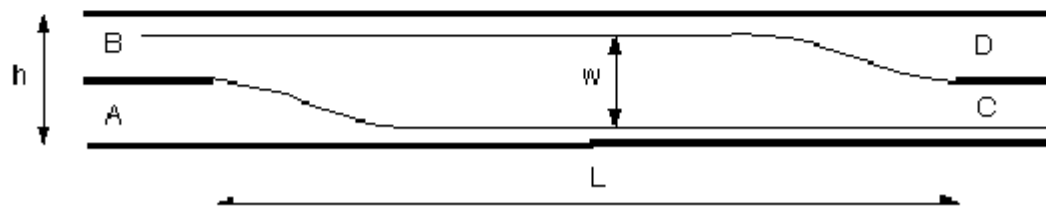


FIG. 3 – Schéma du canal de séparation. Les deux lignes de courant de séparation (à l'entrée et à la sortie) sont représentées en trait fin.

Quelle est la forme du champ de vitesse dans le centre du canal (loin de l'entrée et de la sortie)?

On injecte dans l'entrée A du canal une suspension très diluée de particules de rayon moyen a , rayon moyen qui peut varier selon les expériences entre 10 nm et 100 nm . Quel est le coefficient de diffusion D de ces particules solides? Quel est l'ordre du temps t_D nécessaire aux particules pour diffuser sur la largeur h du canal?

Quelle est la condition sur U pour que les particules injectées dans la partie basse (A) puissent sortir dans la partie haute du canal (D)? (On néglige ici les effets de diffusion).

Ce système est-il bien adapté pour trier selon leur taille des grosses particules comprises entre 1 et 10 microns)?

Dans d'autres systèmes de séparation hydrodynamique, on utilise un champ magnétique pour faire migrer les particules à travers le canal. Le canal peut être enroulé sur le tore d'une centrifugeuse, de rayon $R = 20\text{cm}$, tournant à la vitesse angulaire Ω . Quelle est la migration transversale des particules? Que devient le critère de séparation pour des particules de 1 micron de rayon, en suspension dans l'eau, ayant des densités de $1,1$ et de $1,2$ g/cm³?

- Partie B, préambule, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles de Paris, 27 juin 2002

Partie B : Destin d'une bulle torique

En injectant de l'air au fond d'un grand récipient rempli d'eau, il est possible de créer des bulles toriques qui remontent lentement, tout en s'élargissant (fig. 4). La vitesse

de remontée des bulles est de l'ordre de quelques centimètres par seconde. Le rayon du tore R est de l'ordre d'une dizaine de centimètres. Le rayon a de la section de la bulle est supposé beaucoup plus petit que R .

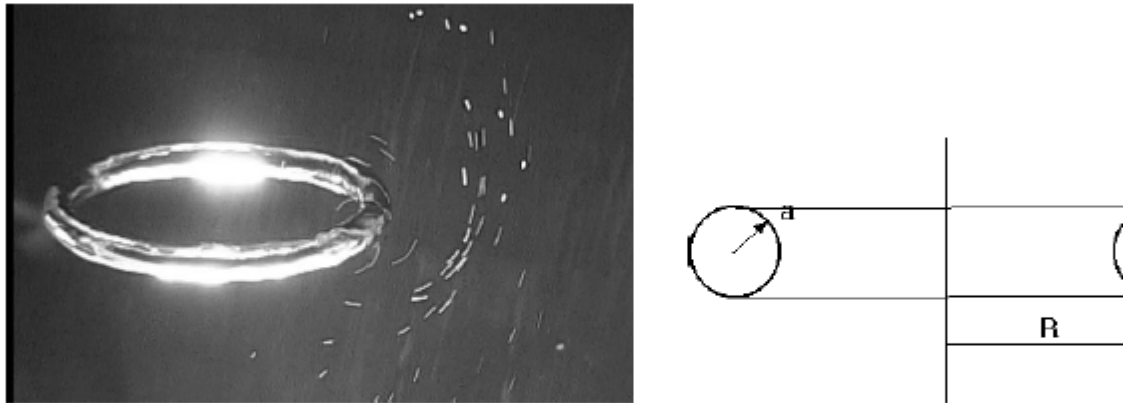


FIG. 4 – Bulle torique. A gauche : de très petites bulles d'air permettent de visualiser la circulation autour du tore. A droite, schéma en coupe de la bulle torique

Calculer le nombre de Reynolds associé à l'écoulement autour de la bulle. Que conclure concernant la dynamique de l'écoulement ?

■ Partie B, Questions 2, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles de Paris, 27 juin 2002

2.1 Elargissement de la bulle

L'expérience montre que la bulle torique s'élargit au cours de son ascension dans cette partie à déterminer la loi d'élargissement.

2.1.1 Notion de masse ajoutée. Partie au choix

Le résultat de cette partie est utilisé dans la partie 2.1.2.

On cherche la force exercée sur un objet cylindrique dans une situation où on totalement les effets de la viscosité.

Quelle est, dans cette approximation, la force exercée sur on objet cylindrique, à une vitesse constante U ?

Lorsque l'objet se déplace à une vitesse variable dans le temps, on peut m force exercée sur cet objet est proportionnelle à la variation d'énergie cinétique fluide, par unité de temps.

On considère que l'écoulement autour de la bulle peut être représenté par potentiel autour d'un cylindre de rayon a , dont le champ de vitesse est donné] données polaires, dans un référentiel où le cylindre est fixe):

$$u_r = U \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta$$

$$u_\theta = -U \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta$$

où U est la vitesse à grande distance du cylindre. Justifier cette approximation.

Montrer que la force proportionnelle à la variation temporelle d'énergie ci s'interpréter comme une "masse ajoutée" de fluide, qui augmente l'inertie du propre de l'objet en mouvement.

Montrer que la masse ajoutée du cylindre est égale à $\rho\pi a^2$, par unité de cylindre.

2.1.2 Equation de mouvement pour la bulle

Montrer que le mouvement de la bulle est régi par l'équation :

$$\rho A \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \Gamma \wedge \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} A$$

où $A = \pi a^2$ est l'aire de la section droite du tore.

Cette équation conduit au système suivant :

$$\frac{du'}{dt'} = -\frac{3}{2}\Gamma' R' v'$$

$$\frac{dv'}{dt'} = \frac{3}{2}\Gamma' R' u' + 1$$

$$\frac{dR'}{dt'} = -u'$$

où u' est la composante (adimensionnelle) horizontale de vitesse, dirigée vers bulle, v' la composante (adimensionnelle) verticale de vitesse. Toutes les longueurs sont normalisées par r_0 qui caractérise le volume V de la bulle ($V = \frac{4}{3}\pi r_0^3$). En particulier, R/r_0 . Les vitesses ont été normalisées par $u_0 = \sqrt{gr_0}$, soit $u' = u/u_0$ et $v' = v/u_0$.

Une relation physique supplémentaire a été utilisée pour passer de l'équation vectorielle à un système d'équations (5 et 6). Quelle est cette relation ?

La circulation et le temps ont été normalisés par des grandeurs caractéristiques. Quelles sont ces grandeurs ?

Lorsque la vitesse de la bulle n'évolue pas trop vite dans le temps, on peut négliger les termes explicitement instationnaires dans les équations 5 et 6. Montrer que, dans ces conditions, le rayon de la bulle obéit à une équation de la forme (toujours en variables normalisées)

$$R' = (R_0^2 + Kt')^{1/2}$$

[Réponse](#) - [Rappel de cours](#) - [Retour à la palette de sujets](#)

■ Partie B, Questions 3, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles de Paris, 27 juin 2002

2.2 Stabilité de la bulle torique

On examine la stabilité de l'interface entre la bulle et le liquide. On néglige la l'interface à l'échelle R et on la considère comme une interface cylindrique de rayon $R \gg a$).

On recherche la stabilité vis-à-vis de perturbation axisymétriques de petite amplitude. La position de l'interface est donnée par :

$$a = a_0(1 + \epsilon \sin qx)$$

où x est la coordonnée le long de l'axe du cylindre (fig. 5).

Dans un premier temps, on néglige l'écoulement à l'extérieur de la bulle. La pression à l'intérieur de la bulle p_i est de la forme :

$$p_i \approx p_e + \frac{\gamma}{a_0} [1 - \epsilon(1 - q^2 a_0^2) \sin qx]$$

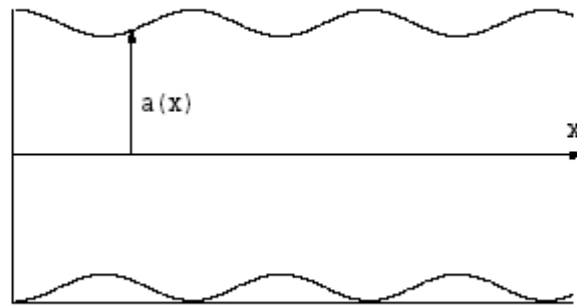


FIG. 5 – Schéma de la déformation de l'interface de la bulle

où p_e est la pression à l'extérieur de la bulle et γ est la tension interfaciale entre liquide.

Représenter schématiquement le champ de pression à l'intérieur de la bulle et induit par ce champ de pression dans les limites q grand et q petit. Que peut-on dire sur la stabilité de l'interface?

On prend maintenant en compte l'écoulement à l'extérieur de la bulle provoqué par un tourbillon de circulation Γ . Montrer que le champ de pression dans la bulle devient

$$p_i = p_\infty - \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi^2 a_0^2} + \frac{\gamma}{a_0} + \epsilon \sin qx \left[\frac{\rho \Gamma^2}{4\pi^2 a_0^2} + (q^2 a_0^2 - 1) \frac{\gamma}{a_0} \right]$$

où p_∞ est la pression à grande distance de la bulle.

Que devient le critère de stabilité de la bulle en présence de circulation?

Quelle est la valeur de la circulation critique Γ_c au-dessus de laquelle la bulle devient instable?

Que vaut cette circulation critique pour une bulle de 5 mm de rayon dans un liquide à tension interfaciale $\gamma = 70$ mN/m)? A quelle vitesse tangentielle cette circulation critique correspond-elle?

■ Partie B, Questions 4, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles de Paris, 27 juin 2002

2.3 Bulle approchant une paroi solide

Généralement, la bulle torique finit par se déstabiliser et se fractionne en un grand nombre de petites bulles. On examine maintenant ce qui arrive aux petites bulles qui s'approchent de la paroi supérieure du récipient.

2.3.1 Bulles sphériques

L'écoulement est schématisé sur la fig. 6. On note h l'épaisseur de la couche de liquide entre la bulle et la paroi solide. L'axe r est parallèle à la paroi et l'axe z est normal à la paroi. Lorsque le rayon a de la bulle est grand devant l'épaisseur h , on peut faire l'approximation : $h \approx h_0 + r^2/2a$.

Montrer que le champ de vitesse dans la mince couche d'eau est donné par

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$v \approx 0$$

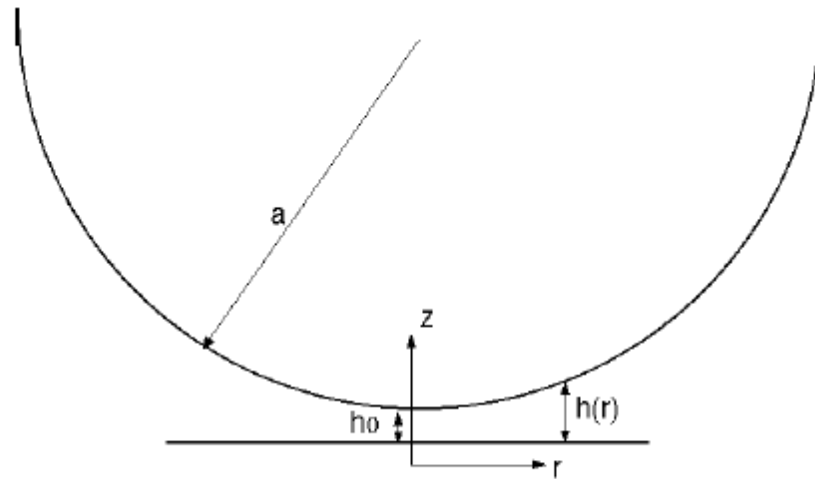


FIG. 6 – Schéma de l'écoulement entre une bulle d'air et une paroi solide

$$\frac{\partial p}{\partial z} \approx 0$$

où u est la composante de vitesse selon r , v la composante de vitesse suivant z .
Montrer que u est donné par :

$$u = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial r} \left(\frac{z^2}{2} - zh \right)$$

Calculer le débit de fluide q dans la couche d'épaisseur h et montrer que le pression est donné par :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{3}{2} \eta \dot{h}_0 \frac{r}{h^3}$$

où \dot{h}_0 est la vitesse d'approche de la bulle.

On admettra que l'ordre de grandeur de la longueur caractéristique dans la direction z est $\sqrt{ah_0}$.

Calculer l'ordre de grandeur de la surpression en $r = 0$.

Montrer que l'ordre de grandeur de la force exercée sur la bulle par le film de fluide est :

$$F \propto \eta a^2 \frac{\dot{h}_0}{h_0}$$

En déduire la loi d'approche de la bulle du plan solide $h_0(t)$.

2.3.2 Déformation de la bulle. Partie au choix

Jusqu'à présent, on a supposé que la bulle restait sphérique. Or sa surface est déformable. L'expérience montre que lorsque l'interface se rapproche du plan, la bulle commence par s'aplatir.

Montrer que le critère d'aplatissement est lié à la quantité :

$$C = \frac{\eta}{\rho a} \sqrt{\frac{a}{\rho}} \frac{ga^2}{\dot{h}_0^2}$$

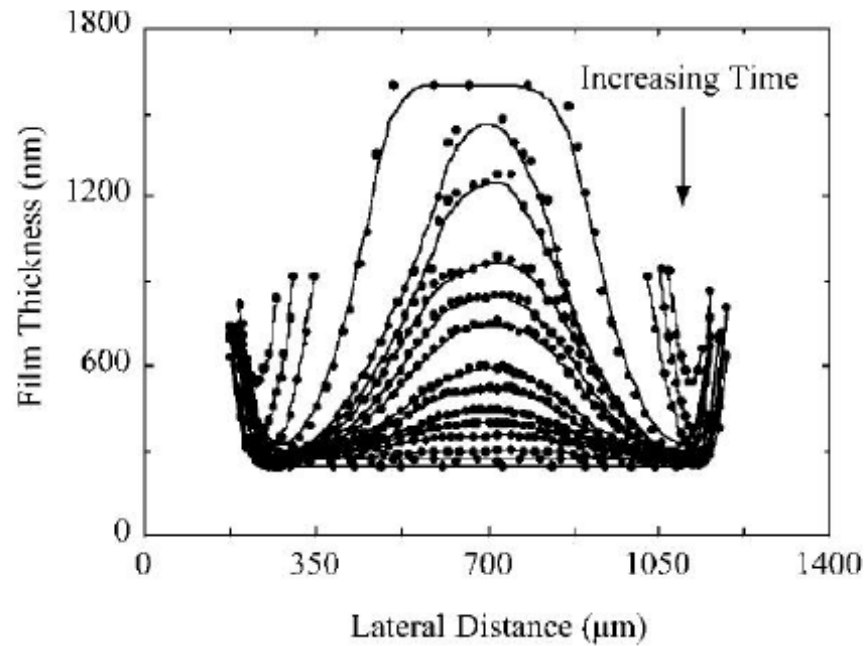


FIG. 7 – *Epaisseur d'un film liquide intercalé entre une bulle et une surface solide à différents instants. Noter la différence d'échelle sur les deux axes.*

Quelle est la dimension de la quantité C ?

Quelle est la valeur de h_0 en dessous de laquelle, la bulle s'aplatit, lorsque $\eta = 1 \text{ mPa}\cdot\text{s}$, $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ et $\gamma = 70 \text{ mN/m}$.

Lorsque le film de liquide est vraiment très mince et pratiquement plat, la déformation est un amincissement du film à sa périphérie et le contact entre la bulle et la surface se produit à la périphérie, en laissant un film de liquide piégé au centre (fig. 7) qualitativement le gradient de pression dans le film de liquide et expliquer pourquoi se pince à la périphérie.

- Réponse Exercice n° 1, partie A, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles de Paris, 27 juin 2002

1.1 Cisaillement alternatif sur un lit de sable

La composante horizontale de vitesse u obéit à l'équation de Navier-Stokes, à volume:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u$$

S'il n'y a qu'une seule composante de vitesse, la relation d'incompressibilité $\partial u / \partial x = 0$ et le terme non linéaire $u \cdot \nabla u$ est nul. D'autre part, les conditions n'imposent pas de gradient de pression dans la direction x . L'équation de Navier-Stokes se réduit donc à l'équation de diffusion:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

L'ordre de grandeur de la vitesse est $dX/dt \approx A\omega$. Le temps caractéristique est la longueur caractéristique dans la direction z , l'équation s'écrit, en ordre de grandeur:

$$u\omega \approx \nu u / \delta^2$$

Ce qui conduit à :

$$\delta \approx \sqrt{\nu / \omega}$$

Le gradient de vitesse à la paroi est, en ordre de grandeur u/δ .

La vitesse de la paroi solide est, en ordre de grandeur, $A\omega \approx 1 \text{ cm/s}$. Le nombre de Reynolds, calculé sur la taille des particules est : $Re = aA\omega/\nu = 2,5$.

La contrainte de cisaillement exercée sur la surface du lit de particules est : $\eta A\omega/\delta$. La force exercée sur chaque particule est donc proportionnelle à σa^2 . Il faut comparer cette force exercée par l'écoulement au poids apparent des particules pour obtenir le nombre de Shields:

$$S = \frac{\eta A\omega a^2}{(\nu/\omega)^{1/2} \delta \rho g a^3}$$

Soit encore :

$$S = \frac{A\omega^{3/2} \nu^{1/2}}{ga(\delta\rho/\rho)}$$

Le nombre de Shields varie comme la puissance 3/2 de la fréquence ω .

- Réponse Exercice n° 2, partie A, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles de Paris, 27 juin 2002

1.2 Convergent de soufflerie

Le nombre de Reynolds de l'écoulement est : $Re = UH/\nu$ où ν est la viscosité de l'air. Ici $Re \approx 5 \times 10^5$. Le nombre de Reynolds étant très grand devant ν , on peut négliger, en première approximation, les effets de la viscosité.

La pression est donnée par la loi de Bernoulli : $p + 1/2\rho u^2 = C^{te}$. La conservation de la masse impose : $UH^2 = U_s\alpha^2 H^2$ où U_s est la vitesse en sortie du convergent. Ici $U_s = U/\alpha$. Soit : $p_e - p_s = \rho(U_s^2 - U^2)/2$. Soit : $p_e - p_s \approx 128\rho U^2$.

La conservation de la masse implique que le volume de l'élément de fluide soit le même en entrée et en sortie. La vitesse en sortie étant $1/\alpha^2$ fois plus grande que la vitesse en entrée, Δx devient $\Delta x_s = \alpha^2 \Delta x$. Pour assurer la conservation du volume, il est nécessaire que : $(\Delta y \Delta z)_s = \alpha^2 \Delta y \Delta z$. En d'autres termes, les dimensions y et z étant équivalentes, $\Delta y_s = \alpha \Delta y$ et $\Delta z_s = \alpha \Delta z$.

Si les effets de la viscosité sont négligeables, on peut utiliser le théorème de Kutta-Joukowski qui stipule que la circulation sur un contour fermé se déplaçant avec le fluide est invariable.

D'où : $C_x \propto \Delta v \Delta y + \Delta w \Delta z = \Delta v_s \alpha \Delta y + \Delta w_s \alpha \Delta z$. A nouveau, en raison de la conservation de la masse, on peut écrire :

$$\frac{\Delta v_s}{\Delta v} = \frac{\Delta w_s}{\Delta w}$$

Les fluctuations transverses sont amplifiées dans un rapport $1/\alpha$.

En appliquant la conservation de la circulation à C_z , on trouve que les fluctuations longitudinales sont atténuées dans un rapport α^2 .

■ Réponse Exercice n° 3, partie A, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles de Paris, 27 juin 2002

1.3 Système de séparation hydrodynamique de particules

Le nombre de Reynolds de l'écoulement est : $Re = Uh/\nu$. Sa valeur maximale nous pouvons supposer que l'écoulement reste laminaire. Dans le canal de section rectangulaire, on a donc un écoulement de Poiseuille avec un profil de vitesse parabolique.

Le coefficient de diffusion de particules sphériques de rayon a est : $D = kT/6\pi\eta a$.
 $a=10$ nm, $D \approx 20\mu\text{m}^2/\text{s}$, pour $a=10$ microns, $D \approx 0,02\mu\text{m}^2/\text{s}$.

Le temps de diffusion sur la longueur h est en ordre de grandeur : $t_D \approx h^2/D$

Pour que les particules puissent sortir en D, il faut qu'elles aient le temps de traverser la largeur $w \approx h$. Il faut donc que le temps de diffusion t_D soit plus court que le temps de transit $t \approx L/U$, soit : $h^2/D < L/U$, soit encore :

$$Pe = \frac{Uh}{D} < \frac{L}{h} = 1000$$

Pour des particules de taille supérieure au micron, ceci imposerait une vitesse de 2 microns/s dans la géométrie utilisée ici, ce qui impliquerait des temps d'élut trop longs. C'est un système mal adapté pour des grosses particules.

Dans un système avec centrifugation, les particules de masse apparente M sont soumises à une force $M\Omega^2 R$. Leur vitesse de migration V est donnée par l'équilibre entre la force centrifuge et la force de traînée $6\pi\eta aV$, soit :

$$V = \frac{2\delta\rho a^2\Omega^2 R}{9\eta}$$

Le temps de traversée du canal est : $t_V = h/V$. La condition de séparation est : $t_V < L/U$, soit : $V > Uh/L = U/1000$. La vitesse de centrifugation Ω peut être choisie pour satisfaire ce critère :

$$\frac{\Omega^2}{U} > \frac{9\eta}{2\delta\rho a^2 R}$$

Pour des particules de 1 micron de rayon, de densité 1,1 ce critère donne : $\Omega > 10^8 \text{m}^{-1}\text{s}^{-1}$ et pour une densité de 3 : $\Omega^2/U > 10^7 \text{m}^{-1}\text{s}^{-1}$.

■ Réponse Partie B, préambule, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielle de Paris, 27 juin 2002

2 Partie B: Destin d'une bulle torique

Le nombre de Reynolds associé à l'écoulement autour de la bulle est : $Re = Ua/\nu$, où U est la vitesse d'ascension. Avec $U = 20\text{cm/s}$, $R = 10\text{cm}$ et $\nu = 10^{-2}\text{cm}^2/\text{s}$, on obtient $Re = 200$. Le nombre de Reynolds est très grand devant 1, on peut donc négliger les effets visqueux dans le mouvement de la bulle.

- Réponse Partie B, Questions 2, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielle de Paris, 27 juin 2002

2.1 Elargissement de la bulle

2.1.1 Notion de masse ajoutée

Lorsqu'on néglige complètement la viscosité, la force de traînée sur un objet à vitesse constante est nulle.

lorsqu'on néglige la viscosité, il ne peut y avoir de création de vorticité dans s'il n'y a pas de vorticité préexistante (théorème de Kelvin). On peut donc général les écoulements de fluide parfait, comme des écoulements irrotationnel

Le rayon R du tore étant beaucoup plus grand que le rayon a de la section peut assimiler la bulle à un cylindre.

2.1.2 Equation de mouvement pour la bulle

On a montré que le nombre de Reynolds de l'écoulement est grand devant peut en conséquence négliger les effets de la viscosité. En écoulement stationn qui s'exercent sur la bulle sont la force de flottabilité $\rho g V$ et la force de porta la circulation autour de la bulle. La force de portance est le produit vectoriel c de la circulation autour de l'objet.

En première approximation, il n'y a pas de force de traînée puisque la visc g e. Si la vitesse de la bulle n'est pas constante, il faut rajouter le terme de r correspondant à l'inertie propre du liquide déplacé par la bulle. En ramena l'unité de longueur le long du tore, on obtient :

$$\rho A \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \Gamma \wedge \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} A$$

En projetant sur l'axe horizontal et sur l'axe vertical, on obtient :

$$A \frac{du}{dt} = -\Gamma v$$

$$A \frac{dv}{dt} = \Gamma u + gA$$

A ces équations de mouvement, il faut ajouter l'équation de conservation du dans la bulle : $V = 2\pi RA$ qui permet d'exprimer R en fonction de A et r_0 :

$$\frac{A}{r_0^2} = \frac{2}{3} \frac{r_0}{R}$$

Dimensionnellement, la circulation est le produit d'une vitesse et d'une lo $\Gamma_0 = u_0 r_0 = \sqrt{gr_0^3}$. Le temps caractéristique est simplement le rapport $r_0/u_0 =$

En négligeant les termes liés à la masse ajoutée du fluide, les équations de 1 réduisent à :

$$v' = 0$$

$$\frac{3}{2} \Gamma' R' u' = -1$$

soit, en tenant compte de la relation cinématique entre R et u :

$$\frac{3}{2} \Gamma' R' \frac{dR'}{dt'} = \frac{3}{4} \Gamma' \frac{dR'^2}{dt'} = 1$$

Cette équation s'intègre par rapport au temps en :

$$R'^2 - R'^2(0) = \frac{4t}{3\Gamma'}$$

■ Réponse Partie B, Questions 3, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielle de Paris, 27 juin 2002

2.2 Stabilité de la bulle torique

Lorsqu'on traverse une interface courbée, il y a un saut de pression proportionnel à la tension interfaciale et à la courbure totale de l'interface.

Dans le plan perpendiculaire à l'axe du cylindre, le rayon de courbure de l'interface est $a = a_0(1 + \epsilon \sin qx)$. La courbure est $C_1 = 1/a \approx 1/a_0(1 - \epsilon \sin qx)$.

Dans le plan passant par l'axe du cylindre, la courbure de l'interface est $C_2 = (a'^2)^{3/2} \approx -a'' = a_0 \epsilon q^2 \sin qx$.

La pression à l'intérieur de la bulle est reliée à la pression à l'extérieur par $p_i = p_e + \gamma(C_1 + C_2)$, soit au premier ordre en ϵ :

$$p_i \approx p_e + \frac{\gamma}{a_0} [1 - \epsilon(1 - q^2 a_0^2) \sin qx]$$

Selon le signe de $(1 - q^2 a_0^2)$ la modulation de pression dans la bulle est en phase ($q a_0 > 1$), soit en opposition de phase ($q a_0 < 1$) avec la déformation de l'interface. Le gradient de pression axial induit un écoulement dans le sens opposé à $\partial p / \partial x$. Lorsque $q a_0 > 1$, l'écoulement provoqué par le gradient de pression s'oppose à la déformation de l'interface. Lorsque $q a_0 < 1$, l'écoulement amplifie la déformation de l'interface. L'interface est instable vis-à-vis de perturbations de longueur d'onde supérieure à $2\pi/a_0$.

L'écoulement associé à un tourbillon de circulation Γ a un champ de vitesse \mathbf{u} pour assurer la conservation de la circulation. Dans cet écoulement irrotationnel, on peut utiliser la loi de Bernoulli pour calculer la pression, d'où :

$$p(r) + \frac{1}{2} \rho u_{\theta}^2 = p_{\infty}$$

La pression à l'extérieur de la bulle devient donc :

$$p_e(a) = p_\infty - \frac{1}{2}\rho u_\theta^2 = p_\infty - \frac{1}{2}\rho \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 a^2}$$

Au premier ordre en ϵ , $1/a^2 \approx 1/a_0^2(1 - 2\epsilon \sin qx)$ et la pression à l'extérieur est donc :

$$p_e(a) = p_\infty - \frac{1}{2}\rho \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 a_0^2}(1 - 2\epsilon \sin qx)$$

En utilisant cette valeur de p_e , on obtient la pression à l'intérieur de la bulle :

$$p_i = p_\infty - \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi^2 a_0^2} + \frac{\gamma}{a_0} + \epsilon \sin qx \left[\frac{\rho \Gamma^2}{4\pi^2 a_0^2} + (q^2 a_0^2 - 1) \frac{\gamma}{a_0} \right]$$

Le critère de stabilité de la bulle est toujours donné par le sens du gradient axial. Si la fluctuation de pression est en phase avec la variation de rayon, c'est

$$\frac{\rho \Gamma^2}{4\pi^2 a_0^2} + (q^2 a_0^2 - 1) \frac{\gamma}{a_0} > 0$$

la bulle est stable. Dans le cas contraire la bulle est instable. La valeur minimale de ci-dessus est obtenue pour $q = 0$. Lorsque

$$\frac{\rho \Gamma^2}{4\pi^2 a_0^2} > \frac{\gamma}{a_0}$$

la bulle est toujours stable. Ceci correspond à une circulation critique :

$$\Gamma_c = 2\pi \sqrt{\frac{\gamma a_0}{\rho}}$$

La vitesse critique correspondante $u_{\theta c}$ est telle que : $\Gamma_c = 2\pi a_0 u_{\theta c}$. D'où :

$$u_{\theta c} = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho} a_0}$$

Avec $\gamma = 70 \text{ mN/m}$, $a_0 = 5 \text{ mm}$ et $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, on trouve $u_{\theta c} = 12 \text{ cm/s}$.

2.3 Bulle approchant une paroi solide

L'épaisseur de la couche d'eau est très petite et on peut supposer que le Reynolds est petit devant un. L'épaisseur de la couche h est petite devant les longueurs transverses qui sont d'ordre a . On peut donc se placer dans l'approximation de Stokes. Soit :

$$\eta \Delta \mathbf{u} = \nabla p \quad u \gg v \quad \partial p / \partial y \approx 0$$

D'autre part, $\Delta u \approx \partial^2 u / \partial z^2$. Les conditions limites sur u sont : $u = 0$ en $z = h$ (l'interface avec la bulle, la contrainte de cisaillement nulle impose : $\partial u / \partial z = 0$ en $z = 0$). En intégrant une première fois l'équation de Stokes, en tenant compte de la condition à l'interface, on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial r} (z - h)$$

Une seconde intégration, en prenant en compte la condition sur la paroi solide c

$$u = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial r} \left(\frac{z^2}{2} - zh \right)$$

Le débit dans la couche de liquide est :

$$q(r) = \int_0^h u(z) dz$$

soit :

$$q(r) = -\frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{h^3}{3}$$

La conservation de la masse de liquide impose que le liquide poussé par la b dans le film soit :

$$\pi r^2 \frac{dh_0}{dt} + 2\pi r q(r) = 0$$

Ceci permet d'exprimer le gradient de pression en fonction de l'épaisseur de liquide :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{3}{2} \eta \dot{h}_0 \frac{r}{h^3}$$

Soit :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{3}{2} \eta \frac{\dot{h}_0}{h_0^3} \sqrt{2ah_0} \frac{r'}{(1+r'^2)^3}$$

où $r' = r/\sqrt{2ah_0}$.

En intégrant par rapport à r' , on obtient donc la pression dans le film de liq

$$p(r') - p(R') = \int_{R'}^{r'} 3\eta \frac{a}{h_0^2} \dot{h}_0 \frac{r' dr'}{(1+r'^2)^3} = -\frac{3}{4} \eta \frac{a}{h_0^2} \dot{h}_0 \left[\frac{1}{(1+r'^2)^2} \right]_{R'}^{r'}$$

où la limite d'intégration R' qui n'est pas précisée, mais est telle que $R' \gg 1$.

La force verticale exercée sur la bulle est l'intégrale de la pression dans le fil

$$F = \int_0^R (p(r) - p_\infty) 2\pi r dr = 4\pi a h_0 \int_0^{R'} (p(r') - p_\infty) r' dr'$$

Après intégration, on obtient :

$$F = \frac{3}{2} \pi \eta a^2 \frac{\dot{h}_0}{h_0} \left[\frac{1}{2} - \frac{1+2R'^2}{(1+R'^2)^2} \right]$$

Si R' est très grand devant 1, le second terme entre crochets est proportionnel D'où :

$$F \approx \frac{3}{4} \pi \eta a^2 \frac{\dot{h}_0}{h_0}$$

Ce dernier résultat peut être obtenu, en ordre de grandeur en sachant que caractéristique dans la direction r est $\sqrt{ah_0}$. En effet, le gradient de pression ét

la surpression en $r = 0$ est, en ordre de grandeur :

$$\frac{\partial p}{\partial r} \sqrt{ah_0} \approx \eta \dot{h}_0 \frac{ah_0}{h_0^3}$$

Pour obtenir l'ordre de grandeur de la force exercée sur la bulle, il faut multiplier la surpression par la surface caractéristique qui est le carré de la longueur caractéristique. Ceci donne :

$$F \approx \eta \dot{h}_0 a \frac{a}{h_0}$$

D'autre part, la poussée d'Archimède exercée sur la bulle est :

$$F_{ar} = \frac{4}{3} \pi a^3 \delta \rho g$$

En égalant la poussée d'Archimède et la force exercée par la couche de liquide, on obtient une équation différentielle pour la distance bulle-plan :

$$\frac{\dot{h}_0}{h_0} = -\frac{16}{9} \frac{a \delta \rho g}{\eta}$$

L'épaisseur de liquide diminue exponentiellement avec le temps :

$$h_0 = h_{0i} \exp(-t/\tau)$$

où la constante de temps τ est proportionnelle à ν/ag .

La bulle reste sphérique tant que la pression dans la couche de liquide reste supérieure à la pression capillaire $\gamma/2a$. L'ordre de grandeur de la surpression dans le film à $r' = 0$ est $\eta a \dot{h}_0 / h_0^2$.

On peut construire le nombre capillaire en faisant le rapport de la pression dynamique du liquide et de la pression capillaire :

$$Ca \approx \frac{\eta a \dot{h}_0 / h_0^2}{\gamma/a} = \frac{\eta}{\gamma} \frac{a^2}{h_0^2} \dot{h}_0$$

En tenant compte de l'expression de la vitesse de la bulle en fonction de la fréquence de vibration, on obtient :

$$Ca \approx \frac{a^3 \delta \rho g}{\gamma h_0}$$

Le nombre capillaire est d'ordre unité lorsque : $h_0 \approx a^3 \delta \rho g / \gamma$. Si on introduit le nombre capillaire λ_c , $Ca \approx 1$ correspond à :

$$\frac{h_0}{\lambda_c} \approx \left(\frac{a}{\lambda_c} \right)^3$$

En d'autres termes, la transition $Ca \approx 1$ se produit lorsque :

$$\frac{h_0}{a} \approx \left(\frac{a}{\lambda_c} \right)^2$$

Les calculs de lubrification effectués jusque là n'ont de sens que si h_0 est petit de

■ Exercice n° 1, partie A, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielle de Paris, 15 mars 2004

1.1 Exercice 1 : bulle sur une paroi poreuse

Dans les piles à combustible, on est amené à éliminer le gaz créé sur une des électrodes par une membrane poreuse. Les bulles de gaz ont une forme hémisphérique, avec un rayon qui diminue lentement dans le temps. L'interface liquide-gaz se raccorde avec la membrane poreuse sous un angle de 90° . On peut représenter la porosité de la membrane par une série de tubes capillaires de rayon a et de longueur égale à l'épaisseur h de la membrane. Ces tubes ont une densité n par unité de surface.

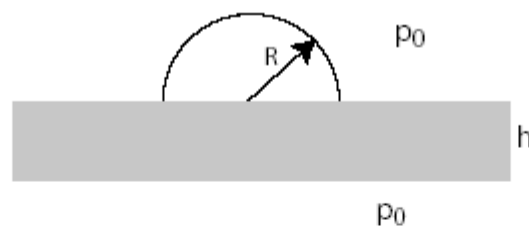


FIG. 1 – Bulle hémisphérique en contact avec une membrane poreuse.

Quelle est la valeur de la pression p_b à l'intérieur de la bulle de gaz ?

Donner l'expression du débit de gaz q dans un tube élémentaire de la membrane.

A un instant donné, quel est le débit total de gaz Q entre la bulle et l'extérieur de la membrane ?

Montrer que la loi d'évolution du rayon de la bulle est :

$$2R \frac{dR}{dt} = - \frac{n\pi a^4}{8h} U^*$$

où U^* est une vitesse dont on donnera la valeur.

Quel est le temps nécessaire à l'évacuation d'une bulle d'air, dont le rayon initial est R_0 , à travers une membrane poreuse d'épaisseur $h = 100 \mu\text{m}$ comportant 1000 pores par m^2 ?

Discuter la validité des hypothèses utilisées pour établir l'équation (1) lorsque R diminue.

■ Exercice n° 2, partie A, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielle de Paris, 15 mars 2004

1.2 Exercice 2 : chute dans un gradient de densité

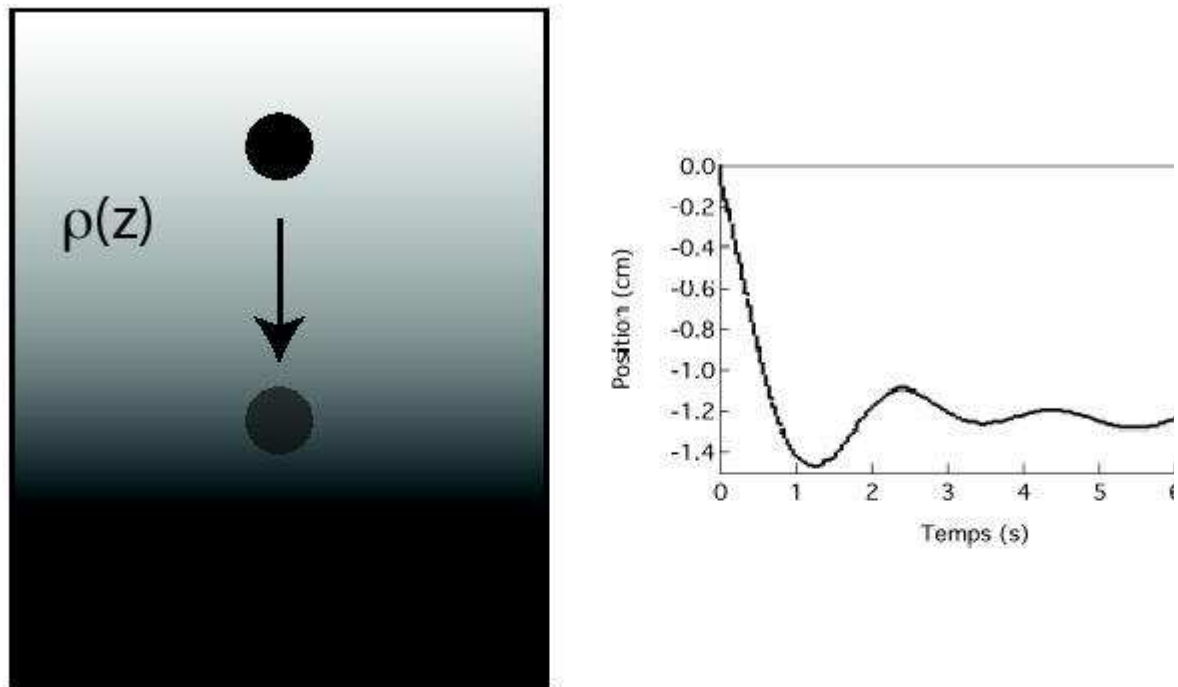


FIG. 2 – Chute d'une bille sphérique dans un liquide présentant un gradient de densité
position de la bille en fonction du temps.

On réalise l'expérience suivante, schématisée sur la fig. 2 : une cuve rectangulaire d'1 m de hauteur est remplie d'eau salée avec un gradient vertical de concentration et la masse volumique du liquide varie linéairement avec la coordonnée verticale :

$$\rho(z) = \rho_0 \left(1 - \frac{z - z_0}{L} \right)$$

où z_0 est la position où la masse volumique a la valeur ρ_0 et la longueur L caractérise le gradient de densité. Une sphère solide de diamètre 1 cm, de masse volumique $\rho_0 = 1060 \text{ kg/m}^3$ est lâchée dans cette cuve rectangulaire. On constate qu'elle tombe dans la cuve jusqu'à se stabiliser à la position z_0 , après avoir oscillé autour de cette position finale.

On supposera que la viscosité de la solution de sel est uniforme et égale à celle de l'eau. Déterminer l'ordre de grandeur de la vitesse maximale atteinte par la sphère et l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds correspondant. Que peut-on en déduire sur la force de traînée exercée sur la sphère ?

Dans le cas d'un corps en mouvement accéléré dans un fluide, il faut ajouter à l'inertie de la sphère, l'inertie du fluide environnant accéléré, c'est la *masse ajoutée*. Pour une sphère de rayon a , la masse de fluide ajoutée a une expression simple : $M_{aj} = 2\pi a^3 \rho_f / 3$. Montrer que l'équation de mouvement de la sphère est de la forme :

$$\left(\frac{\rho_0}{\rho} + \frac{1}{2} \right) \ddot{z} = -\frac{3C_D}{4a} \frac{\dot{z}^3}{|\dot{z}|} - g \frac{z - z_0}{L}$$

où a est le rayon de la sphère et C_D un coefficient sans dimension dont on donnera la signification.

Quelle est la fréquence d'oscillation de la sphère ? A partir de la fréquence estimée, déterminer L et l'écart de masse volumique $\rho - \rho_0$ au point où la sphère est lâchée. Donner une estimation du coefficient C_D .

Que se passerait-il si la sphère était cent fois plus petite ? L'évolution de sa position en fonction du temps serait-elle qualitativement identique ? (la réponse à cette question nécessite seulement l'évaluation d'ordre de grandeurs, pas de calculs détaillés).

■ Exercice n° 3, partie A, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielle de Paris, 15 mars 2004

1.3 Exercice 3 : Nageurs magnétiques

On étudie le comportement de filaments magnétiques constitués de particules colloïdales liées entre elles par du polymère. Ces filaments sont soumis à un champ magnétique oscillant d'amplitude H constante et d'orientation θ variant périodiquement dans le temps : $\theta = \omega t$. Un modèle simple permettant de représenter le comportement dynamique des filaments est celui sur la fig. 3 : il s'agit d'un bâtonnet articulé en trois parties. La partie centrale est fixe et on suppose qu'elle garde une orientation fixe. Il y a deux extrémités mobiles, de longueurs respectives L_1 et L_2 , dont les positions angulaires sont repérées par les angles θ_1 et θ_2 dans le sens trigonométrique.

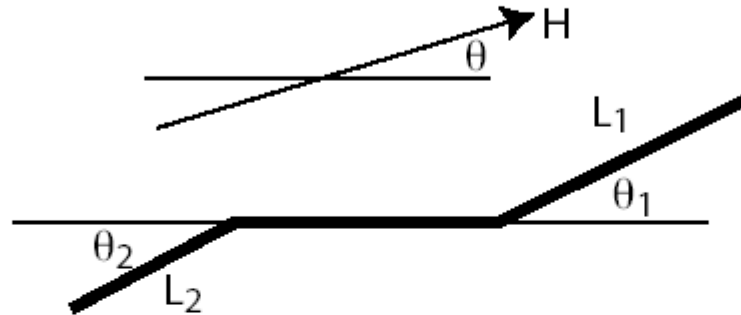


FIG. 3 – Schéma d'un nageur magnétique à deux bras dissymétriques

Dans la réalité, la longueur totale du filament est de l'ordre de quelques dizaines de microns. L'amplitude de mouvement des extrémités est de l'ordre de quelques microns et la fréquence d'oscillation du champ est 50 Hz. Les filaments sont en suspension dans l'eau.

Donner un ordre de grandeur du nombre de Reynolds de l'écoulement associé au mouvement des extrémités du bâtonnet.

Pour décrire le mouvement des extrémités, on fait l'hypothèse qu'elles sont soumises à des couples : un couple moteur dû au champ magnétique, proportionnel à la longueur du bras et à l'écart angulaire entre le champ et les bras :

$$\Gamma_{mi} = ML_i(\theta - \theta_i)$$

et un couple résistant Γ_v dû à la présence du liquide.

Montrer par un raisonnement dimensionnel que le couple résistant est de la forme

$$\Gamma_{vi} = A\eta L_i^3 \frac{d\theta_i}{dt}$$

- Réponse Exercice n° 1, partie A, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielle de Paris, 15 mars 2004

1.1 Exercice 1 : bulle sur une paroi poreuse

La pression dans la bulle est donnée par la loi de Laplace :

$$p_b = p_0 + \frac{2\gamma}{R}$$

Dans un tube du milieu poreux, le débit de gaz est donné par la loi de Poiseuille :

$$q = \frac{\pi a^4 \Delta p}{8\eta h} = \frac{\pi a^4 \gamma}{4\eta h R}$$

Le débit total est la somme des débits élémentaires des canaux en contact avec la $n\pi R^2$ tubes, donc :

$$Q = n\pi R^2 q$$

Le débit total Q donne la variation du volume $V = 2\pi R^3/3$ de la bulle hémisphérique $Q = -2\pi R^2 \dot{R}$, \dot{R} étant négatif.

En supposant que le rayon de la bulle varie assez lentement pour que l'approximation stationnaire dans les tubes du milieu poreux reste valide, on a :

$$Q = n\pi R^2 \frac{\pi a^4 \gamma}{4\eta h R} = 2\pi R^2 \dot{R}$$

soit :

$$2R \frac{dR}{dt} = \frac{dR^2}{dt} = -\frac{n\pi a^4}{4h} U^*$$

où $U^* = \gamma/\eta$.

Cette équation différentielle s'intègre en :

$$R^2 - R_0^2 = -\frac{n\pi a^4 t}{4h} U^*$$

Le temps nécessaire à la disparition d'une bulle de rayon initial R_0 est donc :

$$t = \frac{4h R_0^2}{n\pi a^4 U^*}$$

Avec $R_0 = 1 \text{ mm}$, $h = 100 \mu\text{m}$, $n = 1000$ pores par mm^2 et $a = 1 \mu\text{m}$, on trouve $t \approx$

Lorsque le rayon de la bulle diminue, sa vitesse de contraction augmente puisque Dans le calcul fait ci-dessus, on a implicitement supposé que l'écoulement dans les tubes le milieu poreux est un écoulement laminaire, c'est-à-dire que le nombre de Reynolds I

reste en dessous d'une valeur critique. Lorsque R diminue, la pression capillaire au débit q doit augmenter en proportion. Il existe une limite physique liée au rapport entre le rayon de la bulle et le rayon des pores, donc $\delta p_{max} \approx \gamma/a$ et le nombre de Reynolds maximum dans les tubes est : $Re \approx a^2 \gamma / (\eta \nu h)$.

D'autre part, dans l'équation d'évolution de R on a négligé l'inertie du gaz dans la bulle. Le nombre de Reynolds construit sur le rayon de la bulle et sa vitesse de contraction est constant puisque $R\dot{R} \propto C^{te}$. Donc, si on fait l'hypothèse que l'inertie du gaz est négligée dès le début de la contraction, cette hypothèse reste vraie ensuite.

- Réponse Exercice n° 2, partie A, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielle de Paris, 15 mars 2004

chute dans un gradient de densité

D'après le graphe donnant la position de la sphère en fonction du temps, sa vitesse est de l'ordre de 1,5 cm/s. Le nombre de Reynolds associé est de l'ordre de 150 (diamètre sphère 1cm, viscosité de l'eau 10^{-2} cm²/s. Puisque $Re \gg 1$, la force de traînée sur la sphère a la forme : $F = -\rho_f S C_D V^2$.

Dans l'équation de mouvement de la sphère, il faut tenir compte de son inertie propre, de la masse ajoutée, de la force de traînée et de la poussée d'Archimède, soit :

$$\frac{4}{3}\pi a^3 \left(\rho_0 + \frac{\rho}{2} \right) \ddot{z} = -\rho_f \pi a^2 C_D V^2 - \frac{4}{3}\pi a^3 g(\rho_0 - \rho)$$

Or $\rho_0 - \rho = \rho_0(z - z_0)/L$ et $V = \dot{z}$. En divisant l'équation de mouvement par 4 on obtient :

$$\left(\frac{\rho_0}{\rho} + \frac{1}{2} \right) \ddot{z} = -\frac{3C_D}{4a} \frac{\dot{z}^3}{|\dot{z}|} - \frac{\rho_0 g}{\rho} \frac{z - z_0}{L}$$

L'équation du mouvement est similaire à celle d'un pendule amorti. La fréquence critique est obtenue en comparant le terme d'inertie et le terme de force de rappel, ici la poussée d'Archimède. Si on cherche une solution oscillante de la forme $z - z_0 = A \cos \omega t$, en omettant d'amortissement l'équation de mouvement devient :

$$\left(\frac{\rho_0}{\rho} + \frac{1}{2} \right) \omega^2 = \frac{\rho_0 g}{\rho L}$$

Près du point d'équilibre, ρ est très peu différent de ρ_0 et la fréquence d'oscillation est par :

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{3L}}$$

Ce qui donne pour L , en fonction de la période d'oscillation T :

$$L = \frac{2gT^2}{12\pi^2}$$

T est de l'ordre de 2s, ce qui donne $L \approx 70$ cm. La sphère est lâchée à peu près 1,5 cm en dessous de son point d'équilibre, l'écart relatif de masse volumique est donc 1,5/70.

La vitesse de la sphère dans la partie initiale du mouvement est donnée par l'équilibre entre la force de traînée et le terme de gravité, soit, approximativement :

$$\frac{3C_D}{4a} V^2 = \frac{\rho_0 g}{\rho} \frac{z - z_0}{L} \approx \frac{1,5g}{70}$$

Cette estimation donne un coefficient de traînée de quelques unités, ce qui est comparable aux coefficients de traînée mesurés pour des sphères à des Reynolds modérés.

Si la sphère était cent fois plus petite, la force de gravité qui varie comme le cube du rayon serait un million de fois plus petite. En supposant que la force de traînée varie comme le carré de la vitesse de déplacement varierait comme $a^{1/2}$ et le nombre de Reynolds varierait comme $a^{1/2}$. En divisant le rayon par 100, on passerait donc dans un régime de petit nombre de Reynolds où la force de traînée deviendrait donc négligeable. On ne pourrait plus alors avoir d'oscillations et la sphère irait directement à sa position d'équilibre (équivalent d'un pendule suramorti).

2004

Nageurs magnétiques

La vitesse de déplacement des extrémités du bâtonnet est donnée par le produit de a et de la fréquence, soit $V \approx 500 \mu\text{m/s}$. Le nombre de Reynolds est au maximum de l'ordre 1.

A petit nombre de Reynolds, la force sur un objet de dimension a est proportionnelle à la vitesse de déplacement de l'objet : $F \approx \eta a V$. Si on considère un objet rectiligne tournant à la vitesse angulaire ω , chaque point de l'objet se déplace à une vitesse linéaire $V = \omega r$ à la distance r au centre de rotation. Un élément de longueur dl du bâtonnet subit une force F , cette force est associée à un couple $\eta \omega r^2 dl$. En intégrant ce couple élémentaire sur toute la longueur L du bâtonnet, on obtient : $\Gamma_{vi} \propto \eta L^3 \omega$.

A petit nombre de Reynolds, il y a toujours équilibre entre la force motrice et la force visqueuse (pas d'inertie). Pour les mouvements de rotation, il y a équilibre entre le couple M et le couple visqueux : $\Gamma_m + \Gamma_{vi} = 0$. Soit :

$$M(\theta - \theta_i) - A\eta L_i^2 \dot{\theta}_i = 0$$

d'où :

$$M(\theta_m - \theta_{mi} e^{i\phi_i}) - Ai\omega\eta L_i^2 \theta_{mi} e^{i\phi_i} = 0$$

En séparant partie réelle et partie imaginaire, on obtient :

$$M(\theta_m - \theta_{mi} \cos \phi_i) + A\omega\eta L_i^2 \theta_{mi} \sin \phi_i = 0$$

$$M\theta_{mi} \sin \phi_i + A\omega\eta L_i^2 \theta_{mi} \cos \phi_i = 0$$

D'où les déphasages :

$$\tan \phi_i = -\frac{A\omega\eta L_i^2}{M}$$

et les amplitudes d'oscillation :

$$\theta_{mi} = \theta_m \left(\frac{M^2}{M^2 + \omega^2 A^2 \eta^2 L_i^4} \right)^{1/2}$$

Les trajectoires dans le plan θ_1, θ_2 sont des ellipses. Si $L_1 > L_2$, l'amplitude du mouvement de l'extrémité 1 est plus petite que celui de l'extrémité 2. Le déphasage de l'extrémité 1 est plus grand que celui de l'extrémité 2.

A petit nombre de Reynolds, les forces sont proportionnelles aux vitesses de déplacement. Si on change le signe de la vitesse, on change le signe de la force.

Dans le cas où les deux bras sont de même longueur, leurs déplacements ont la même amplitude et ils ont le même déphasage par rapport à l'orientation du champ magnétique. De ce fait, à tout instant la configuration du bâtonnet reste symétrique, $\theta_1 = \theta_2$ et $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2$. Si on considère seulement des extrémités, son mouvement est symétrique dans le temps par rapport à $t = 0$. La force développée pendant une demi-période est exactement annulée par la force développée pendant l'autre demi-période. La force résultante sur le bâtonnet est nulle en moyenne sur une période.

- Réponse Partie B, Questions 1, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielle de Paris, 15 mars 2004

2.1 Réfraction des lignes de courant à la traversée du front d

S'il y avait une discontinuité de vitesse tangentielle à la traversée du front de flamme de vitesse divergerait et on obtiendrait une contrainte de cisaillement également div

La conservation globale du flux de masse à travers le front de flamme implique $\rho_b \mathbf{U}_b \cdot \mathbf{n}$ où \mathbf{n} est le vecteur normal au front de flamme. Soit, en projetant : $\rho_f U_f \cos \alpha$
D'autre part, la continuité de la composante tangentielle impose : $U_f \sin \alpha = U_b$
conduit à :

$$\rho_f \tan \beta = \rho_b \tan \alpha$$

- Réponse Partie B, Questions 2, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielle de Paris, 15 mars 2004

2.2 Instabilité de Darrieus-Landau

Les fronts de flamme de prémélange sont naturellement instables. Une analyse linéaire du front confirme ce fait expérimental. On considère un front stationnaire, in plan, avec une perturbation périodique de vecteur d'onde q et de taux de croissance σ : $\zeta = \zeta_0 e^{i(qy - \sigma t)}$. La modulation du front introduit une perturbation du champ de vitesse : on rajoute à la vitesse de base (U_f dans les gaz frais, U_b dans les gaz brûlés, U_f et U_b étant tous deux orientés dans la direction x) une composante de petite amplitude (u_{fx} , u_{fy} dans les gaz frais et u_{bx} , u_{by} dans les gaz brûlés). À ces perturbations de vitesse, est associée une modification du champ de pression (p_f dans les gaz frais, p_b dans les gaz brûlés).

Montrer que ces composantes additionnelles de vitesse obéissent aux équations du premier ordre en amplitude de perturbation :

Le champ de vitesse est la somme de la composante de base U_f (pour les gaz frais) et d'une fluctuation u_f , avec $u_f \ll U_f$. De plus, U_f est indépendant des coordonnées d'espace et de temps. L'équation de Navier-Stokes s'écrit donc pour la composante x :

$$\frac{\partial u_{fx}}{\partial t} + (U_f + u_{fx}) \frac{\partial u_{fx}}{\partial x} + u_{fy} \frac{\partial u_{fx}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p_f}{\partial x} + \nu \Delta u_{fx}$$

et pour la composante y :

$$\frac{\partial u_{fy}}{\partial t} + (U_f + u_{fx}) \frac{\partial u_{fy}}{\partial x} + u_{fy} \frac{\partial u_{fy}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p_f}{\partial y} + \nu \Delta u_{fy}$$

La composante fluctuante étant beaucoup plus petite que la composante de base, on peut dans les équations de mouvement les termes de premier ordre en perturbation et négliger les termes d'ordre supérieur.

De plus, le nombre de Reynolds de l'écoulement est assez élevé. En effet, la vitesse est de l'ordre de 10 cm/s, les dimensions caractéristiques de l'écoulement sont au moins de l'ordre de 1 cm. La viscosité cinématique de l'air étant de l'ordre de $10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, le nombre de Reynolds est au moins de l'ordre de 1000. On peut donc négliger les termes liés à la viscosité. Ceci conduit aux équations de mouvement approchées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{fx}}{\partial t} + U_f \frac{\partial u_{fx}}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p_f}{\partial x} \\ \frac{\partial u_{fy}}{\partial t} + U_f \frac{\partial u_{fy}}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p_f}{\partial y} \end{aligned}$$

La vitesse moyenne de l'écoulement étant très inférieure à la vitesse du son, on peut considérer les gaz comme incompressibles et le champ de vitesse obéit à l'équation $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, soit

$$\frac{\partial (U_f + u_{fx})}{\partial x} + \frac{\partial u_{fy}}{\partial y} = \frac{\partial u_{fx}}{\partial x} + \frac{\partial u_{fy}}{\partial y} = 0$$

Avec des équations similaires pour les composantes de vitesse du côté des gaz brûlés.

Lorsque la viscosité est négligeable, un écoulement initialement irrotationnel reste irrotationnel. L'écoulement de base est irrotationnel puisque la vitesse est constante. L'écoulement est donc lui aussi irrotationnel. On peut alors écrire le champ de vitesse comme le gradient du potentiel Φ , soit : $u_x = \partial\Phi/\partial x$ et $u_y = \partial\Phi/\partial y$. La condition d'incompressibilité impose donc $\Delta\Phi = 0$.

On cherche des solutions périodiques en y de la forme : $\Phi \propto \exp(iqy)f(x)\exp(\sigma t)$ en fonction des variables. $\Delta\Phi = 0$ conduit à :

$$-q^2 f + \frac{d^2 f}{dx^2} = 0$$

dont les solutions sont de la forme : $f = A \exp(qx) + B \exp(-qx)$, la fonction f devant être bornée lorsque $x \rightarrow \infty$ (côté gaz brûlés) ou $x \rightarrow -\infty$ (côté gaz frais). Les composantes des dérivées spatiales du potentiel Φ , elles sont proportionnelles à $\exp(iqy)\exp(\pm qx)$.

S'il n'y a pas de perturbation de pression ($p = 0$), les équations de mouvement

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{fx}}{\partial t} + U_f \frac{\partial u_{fx}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u_{fy}}{\partial t} + U_f \frac{\partial u_{fy}}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Cherchons à nouveau des solutions de la forme : $u \propto \exp(iqy)g(x)\exp(\sigma t)$. En injectant dans les équations de mouvement, on obtient :

$$\sigma g + U_f \frac{dg}{dx} = 0$$

Cette équation s'intègre en : $g \propto \exp(-\sigma x/U_f)$ et la solution correspondante pour u_y est : $u_b \propto \exp(iqy)\exp(-\sigma x/U_b)\exp(\sigma t)$ (la forme équivalente pour u_f n'a pas de sens car elle diverge lorsque $x \rightarrow \infty$).

La forme générale de la perturbation est donc, dans les gaz frais : $u_f = A \exp(iqy)\exp(-\sigma x/U_f)\exp(\sigma t)$ et dans les gaz brûlés : $u_b = B \exp(iqy)\exp(-qx)\exp(\sigma t) + C \exp(iqy)\exp(-\sigma x/l)$.

Les autres conditions aux limites sur le front sont :

- continuité de la pression :

$$p_f = p_b$$

Il n'y a pas de tension interfaciale associée au front de flamme. L'équilibre impose la continuité des contraintes normales. La pression est donc la même de part et d'autre du front.

- condition cinématique :

$$u_{fx} = u_{bx} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

La condition cinématique exprime simplement le fait que le fluide au voisinage du front se déplace avec celui-ci.

La relation de dispersion pour la perturbation est de la forme :

$$\sigma^2(U_f + U_b) + 2\sigma U_f U_b q + q^2 U_f U_b (U_f - U_b) = 0$$

Nous cherchons une solution réelle de l'équation de dispersion que l'on peut écrire en factorisant U_f :

$$\sigma^2(1 + E) + 2\sigma U_f E q + q^2 U_f^2 E(1 - E) = 0$$

Le discriminant est : $\delta = U_f^2 q^2 [E^2 - E(1 - E^2)] = U_f^2 q^2 E^2 (E + 1 - 1/E)$. Il est supérieur à 1. La solution réelle positive de l'équation du second degré est :

$$\sigma = \frac{-2U_f E q \pm \sqrt{4U_f^2 q^2 E^2 (E + 1 - 1/E)}}{2(1 + E)}$$

acceptable car il implique que des longueurs d'onde infiniment petites sont amplifiées rapidement.

Interprétation physique de l'instabilité de Darrieus-Landau : des deux schémas représentant la réfraction des lignes de courant à travers le front de flamme déduit compatible avec $\rho_b < \rho_f$? Pour chacun des schémas, indiquer qualitativement la variation de vitesse à proximité immédiate du front, derrière un creux et derrière un bosse de flamme. Que pouvez-vous en déduire sur la stabilité du front ?

Si la densité des gaz brûlés est inférieure à celle des gaz frais, la réfraction des lignes de courant sur le front de flamme est telle que : $\beta < \alpha$. Le dessin correspondant est celui où les lignes de courant se resserrent derrière (en amont) les bosses ($\zeta > 0$) du front. Le resserrement correspond à une augmentation de la vitesse. De ce fait, les bosses du front sont amplifiées. Réciproquement, il y a un ralentissement des gaz derrière les creux du front, qui sont amplifiés. La variation de densité des gaz est donc à l'origine de l'instabilité du front.

■ Réponse Partie B, Questions 3, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielle de Paris, 15 mars 2004

2.3 Largeur du front de flamme

Dans un écoulement, la distribution de température est donnée par l'équation

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \Delta T$$

Ici l'écoulement est stationnaire et il y a une seule composante de vitesse pour l'écoulement perturbé : $u_x = U_f$, d'où :

$$U_f \frac{\partial T}{\partial x} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

En ordre de grandeur :

$$U_f \frac{dT}{\delta_{th}} \approx \kappa \frac{dT}{\delta_{th}^2}$$

d'où : $\delta_{th} \approx \kappa / U_f$. Avec $\kappa = 1,4 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}$ et $U_f \approx 10 \text{ cm/s}$, l'ordre de grandeur de la largeur du front de flamme est $\delta_{th} = 1 \mu\text{m}$.

■ Réponse Partie B, Questions 4, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielle de Paris, 15 mars 2004

2.4 Influence de la gravité

Si on tient compte de la gravité, il faut rajouter un terme de force en volume dans l'équation de mouvement : $\rho_f g$ dans les gaz frais, $\rho_b g$ dans les gaz brûlés. Si les gaz brûlés sont plus denses que les gaz frais, la gravité a tendance à stabiliser le front de flamme.

- Réponse Partie B, Questions 5, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielle de Paris, 15 mars 2004

2.5 Relation de dispersion complète

Pour déterminer la relation de dispersion complète, il faut ajouter au terme mobilité $\sigma \propto kU_f E$ un terme stabilisant ($\sigma < 0$) dû à la diffusion aux grands vecteurs d'onde et un terme stabilisant dû à la gravité aux petits vecteurs d'onde.

- Réponse Partie B, Questions 6, Examen, Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielle de Paris, 15 mars 2004

2.6 Tranquilisation de l'écoulement

La couche limite qui se développe sur la paroi des tubes s'épaissit progressive l'écoulement. Son épaisseur δ_ν est donnée par : $\delta_\nu = \sqrt{\nu x / U}$ où U est la vitesse de l'écoulement. On a en sortie des canaux un profil de vitesse parabolique si $\delta_\nu(x = L)$ est ou égal au rayon des tubes. Avec $L = 4 \text{ cm}$, $\nu = 1,5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, $\delta_\nu(x = L) \approx 2 \text{ cm}$, supérieur au rayon des tubes. On a donc un profil de vitesse parabolique en sortie.

En aval des canaux, le profil de vitesse redevient plat à une distance x telle que soit $x = U \delta_\nu^2 / \nu \approx 0,6 \text{ m}$.